Sólidos Geométricos, Poliedros e Volume

2017.1

Prof. Lhaylla Crissaff

www.professores.uff.br/lhaylla

Sólidos Geométricos

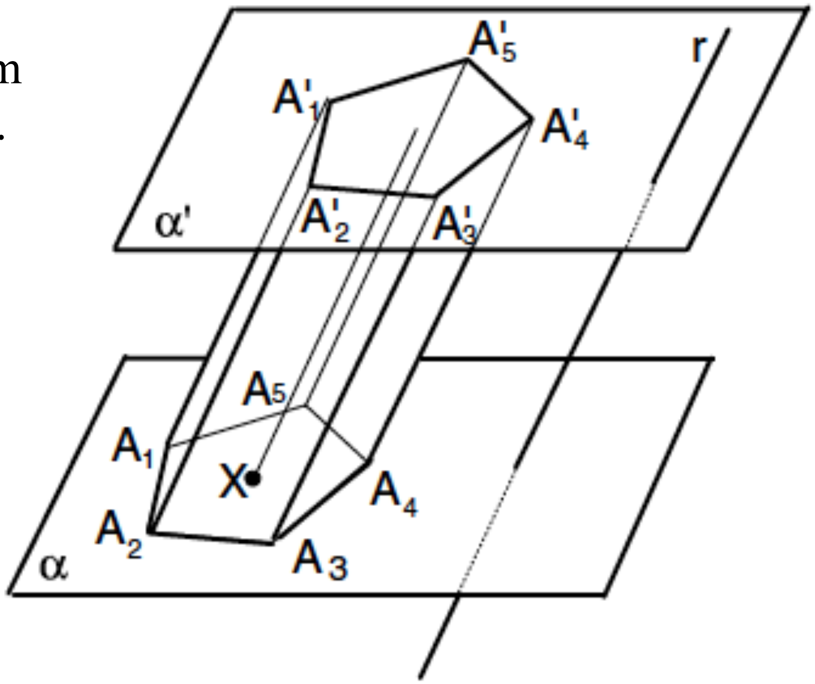
- Prisma
- Pirâmide
- Cilindro
- Cone
- Esfera

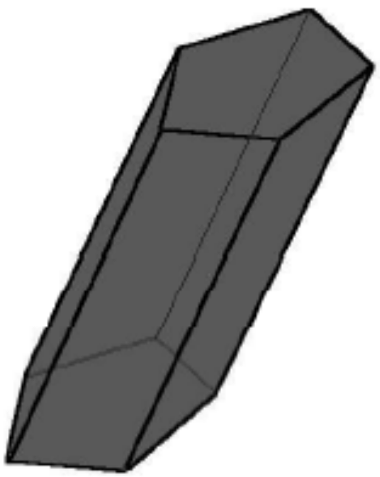
Prisma

Prisma

Sejam α e α' dois planos paralelos e r uma reta que os corta. Seja $P = A_1A_2 \dots A_n$ um polígono convexo contido em α. Por todo ponto X pertencente ao polígono ou ao seu interior, trace a reta paralela a r passando por X, e seja X' o ponto em que essa reta corta o plano α'. A figura formada pela união dos segmentos XX' é chamada de prisma.

Ex.: *P* é um pentágono.



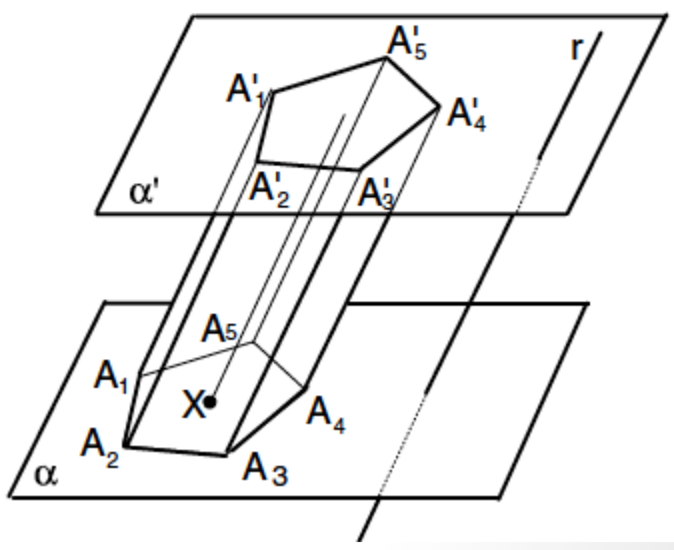


Prisma - Elementos

- Os polígonos $P = A_1 A_2 \ldots A_n$ e $P' = A_1'A_2'\ldots A_n'$ unidos com seus interiores são chamados **bases** do prisma.

- Os quadriláteros $A_1 A_2 A_2'A_1'$, $A_2 A_3 A_3'A_2'$, ..., $A_n A_1 A_1'A_n'$ unidos com seus interiores são chamados **faces laterais** do prisma, que são paralelogramos.

- A união das bases com suas faces laterais é chamada de **fronteira** do prisma.

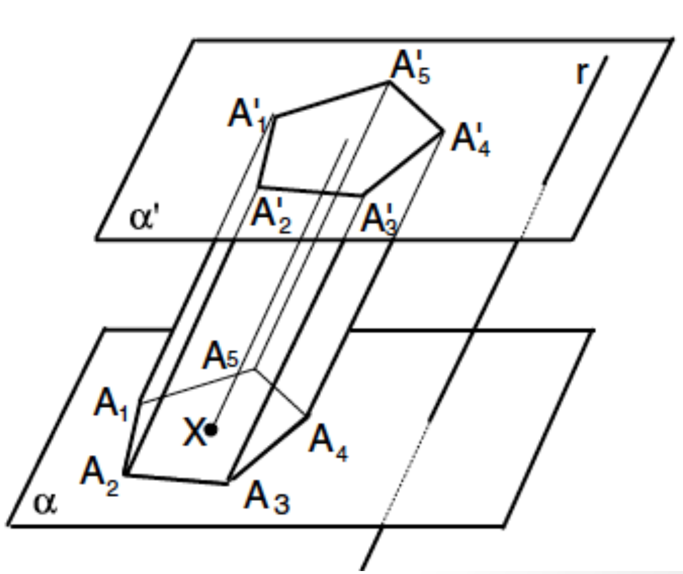


Prisma - Elementos

- $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1', A_2', \ldots, A_n'$ são chamados **vértices**.

- Os segmentos $A_1A_1', A_2A_2', \ldots, A_nA_n'$ são chamados **arestas laterais**.

- Como as faces laterais de um prisma são paralelogramos, então as arestas laterais são todas congruentes.



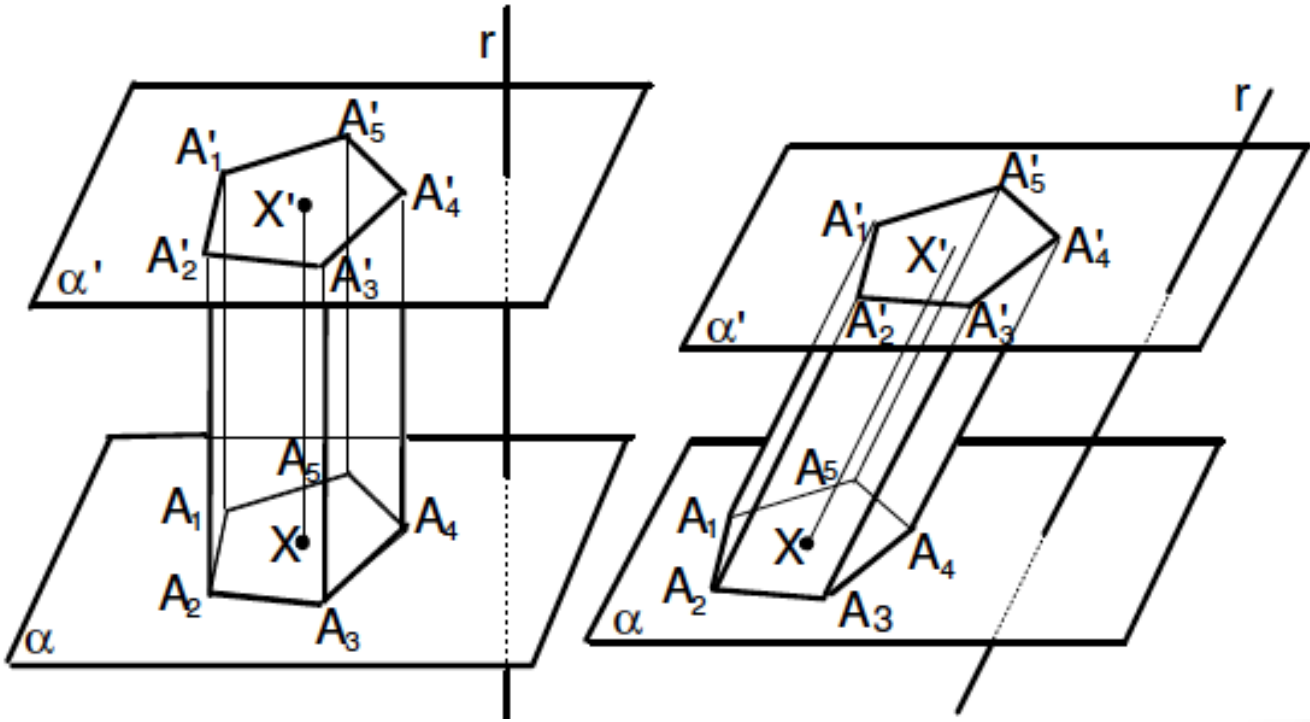
Prisma

- Um prisma é chamado **reto** se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Caso contrário, é chamado **oblíquo**.

- As faces laterais de um prisma reto são retângulos.

Ex.:

Reto



Oblíquo

Prisma

- A altura de um prisma é a distância entre os planos das bases.
- A altura de um prisma reto é a medida de cada uma de suas arestas laterais.
- A área lateral de um prisma é definida como a soma das áreas de suas faces laterais.
- A área total de um prisma é a soma da área lateral com as áreas de suas bases.

Prisma

- A área de um prisma reto de altura h e base $P = A_1 \ldots A_n$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
\text{Área lateral} &= \text{Área}(A_1A_2A_2'A_1') + \ldots + \text{Área}(A_nA_1A_1'A_n') \\
&= m(A_1A_2)h + \ldots + m(A_nA_1)h \\
&= [m(A_1A_2) + \ldots + m(A_nA_1)]\,h \\
&= (\text{perímetro de } P)h
\end{aligned}
$$

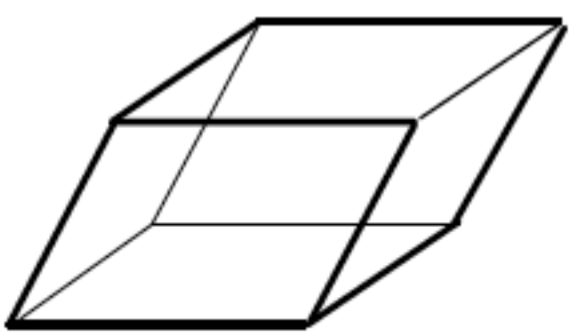
OBS.: As arestas laterais de um prisma reto são retângulos.

Prisma - Paralelepípedo

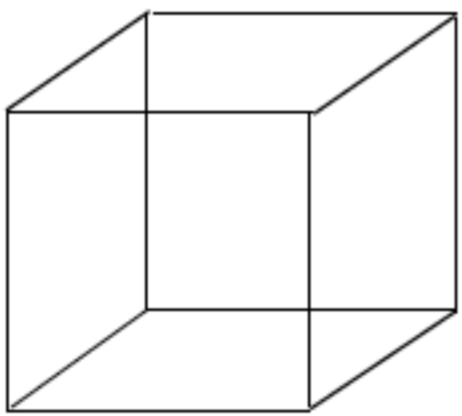
- Um prisma cujas bases são paralelogramos é chamado **paralelepípedo**.

- Como todas as faces laterais de um prisma são paralelogramos, então todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos.

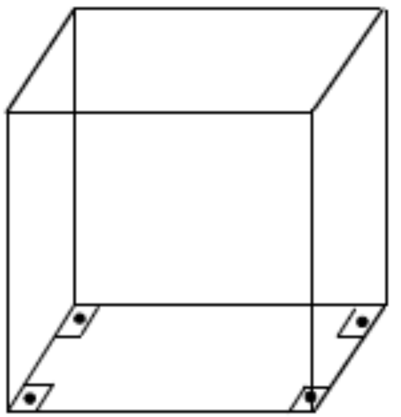
- Tipos de paralelepípedos:



Oblíquo



Reto

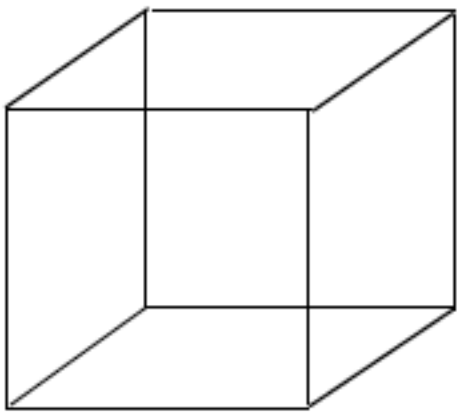


Retângulo

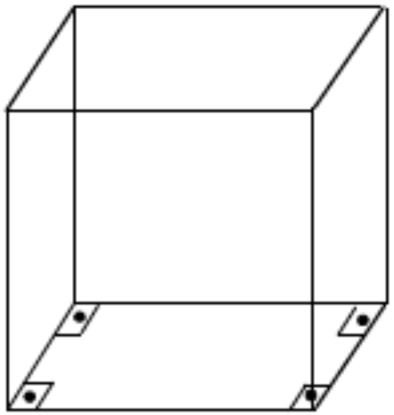
Prisma - Paralelepípedo

- Um paralelepípedo reto é dito retangular ou retângulo se suas bases são retângulos.

- Como as faces laterais de um prisma reto são retângulos, então todas as faces de um paralelepípedo retângulo são retângulos.



Reto



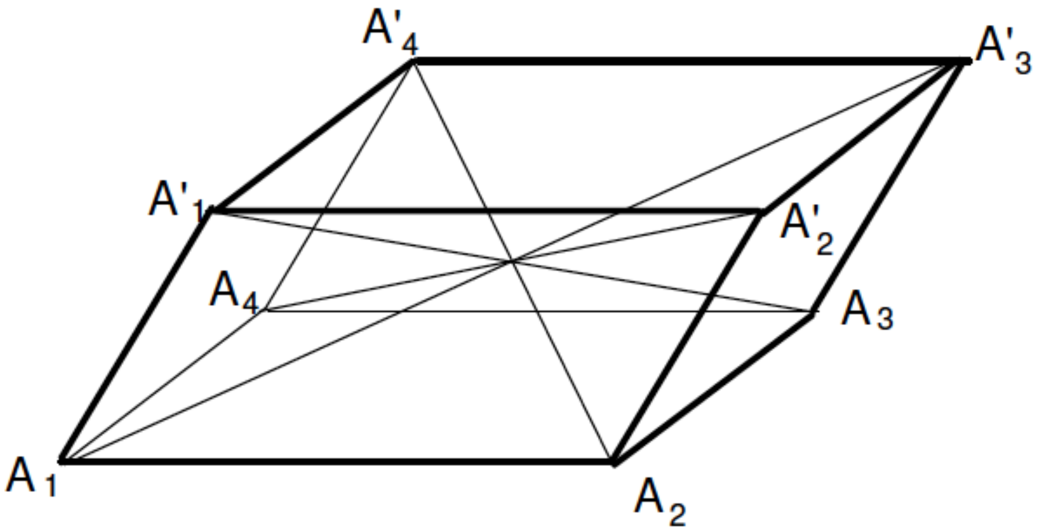
Reto retângulo

- Um cubo é um paralelepípedo retangular que tem todas as arestas congruentes.

Prisma - Paralelepípedo

- Chama-se diagonal de um paralelepípedo a um segmento ligando dois vértices não pertencentes a uma mesma face.

- Um paralelepípedo possui quatro diagonais.

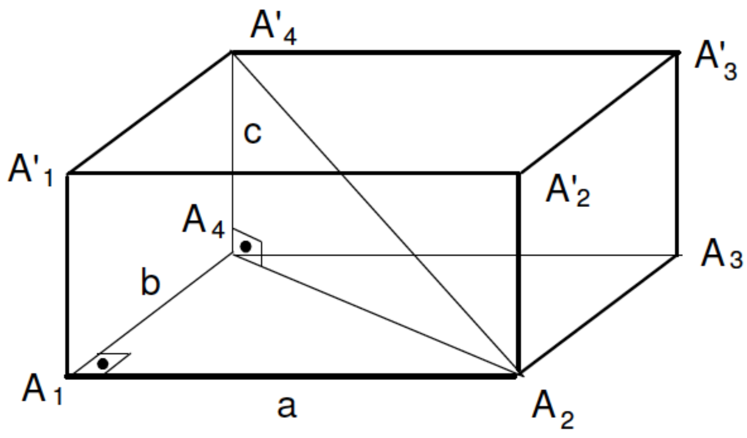


Prisma - Paralelepípedo

- Proposição: As diagonais de um paralelepípedo cortam –se em um ponto e esse ponto divide cada uma delas ao meio.

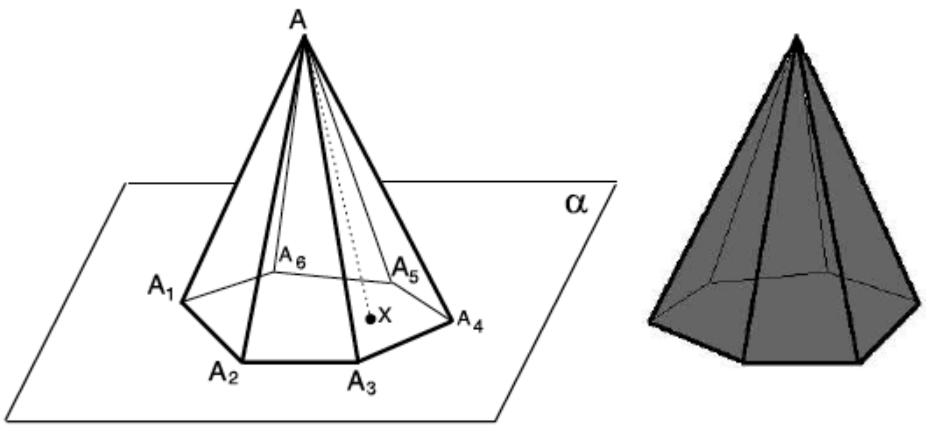
- Proposição: As faces opostas de um paralelepípedo são paralelas e congruentes.

- Se as medidas de um paralelepípedo retângulo são *a, b* e *c*, então as duas diagonais medem $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Pirâmide

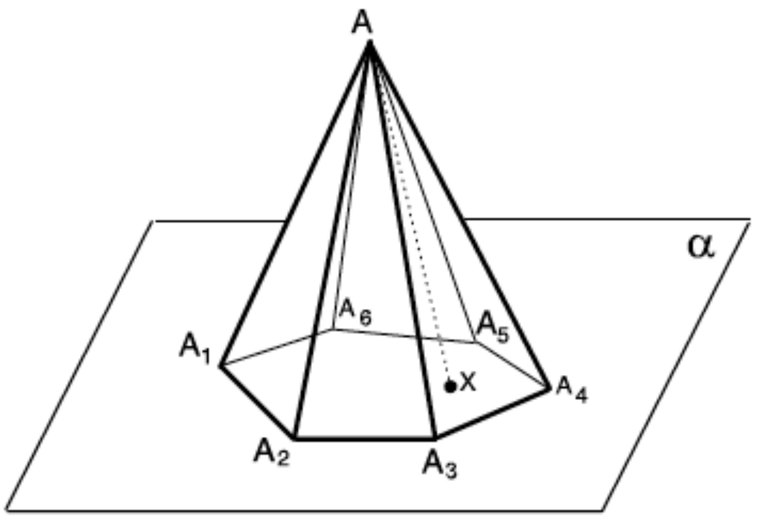
Considere um polígono convexo $P = A_1A_2\ldots A_n$ contido em um plano α, e um ponto A fora de α. Para todo ponto X pertencente a P ou ao seu interior, trace o segmento AX. A figura formada pela união dos segmentos AX é chamada de *pirâmide*



Ex.: Pirâmide hexagonal.

Pirâmide - Elementos

- A é o **vértice** da pirâmide.
- O polígono P e seu interior é a **base** da pirâmide.
- $AA_1, AA_2, \ldots, AA_n$ são as **arestas laterais**.
- $AA_1A_2, AA_2A_3, \ldots, AA_nA_1$ juntamente com seus interiores são as **faces laterais**.
- A distância do ponto A ao plano da base é a **altura** da pirâmide.



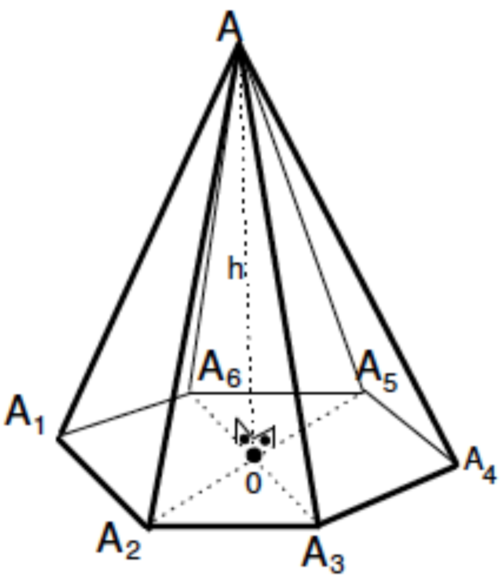
Pirâmide

- Se a base da pirâmide é um triângulo, ela é chamada pirâmide triangular ou tetraedro.

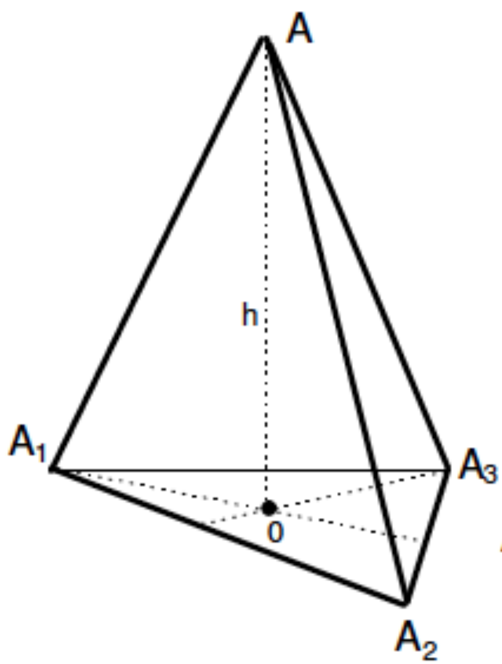
- Se a base da pirâmide é um quadrado, ela é chamada pirâmide quadrangular.

- Uma pirâmide é chamada regular se sua base é um polígono regular e se o pé da perpendicular baixada do vértice ao plano coincide com o centro da base.

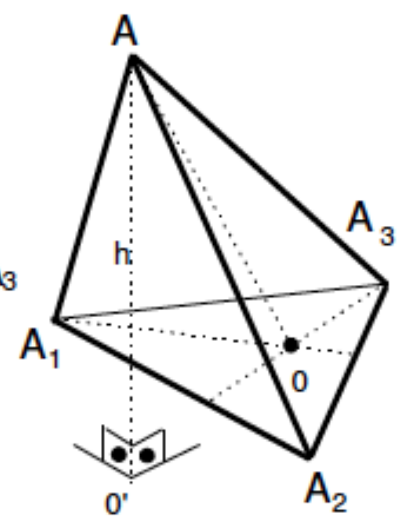
Pirâmide



Regular



Regular



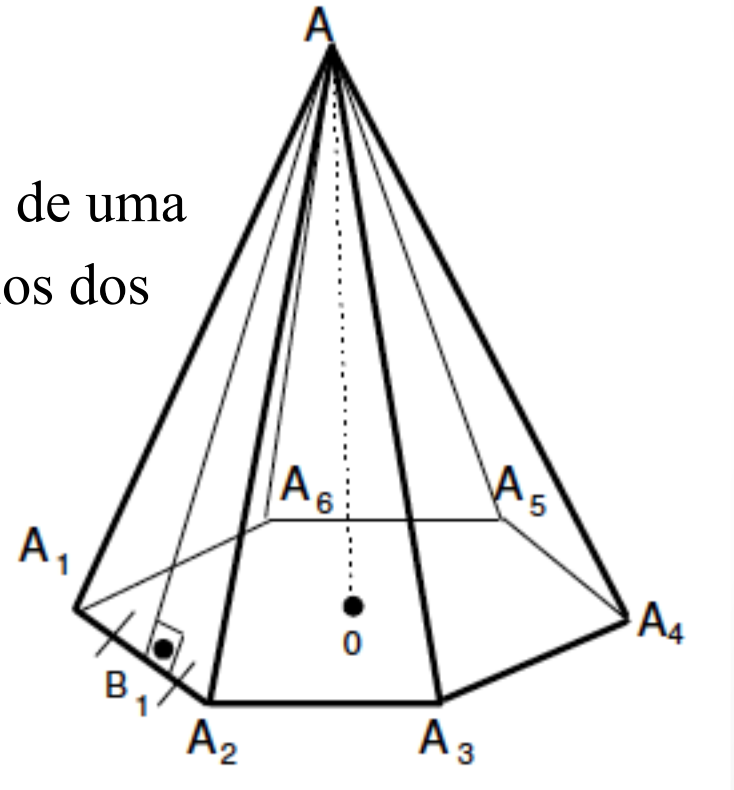
Não Regular

Pirâmide

- Proposição: As faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles congruentes.

- Os segmentos ligando o vértice de uma pirâmide regular aos pontos médios dos lados são todos congruentes.

Estes segmentos são chamados **apótemas** da pirâmide.



Pirâmide

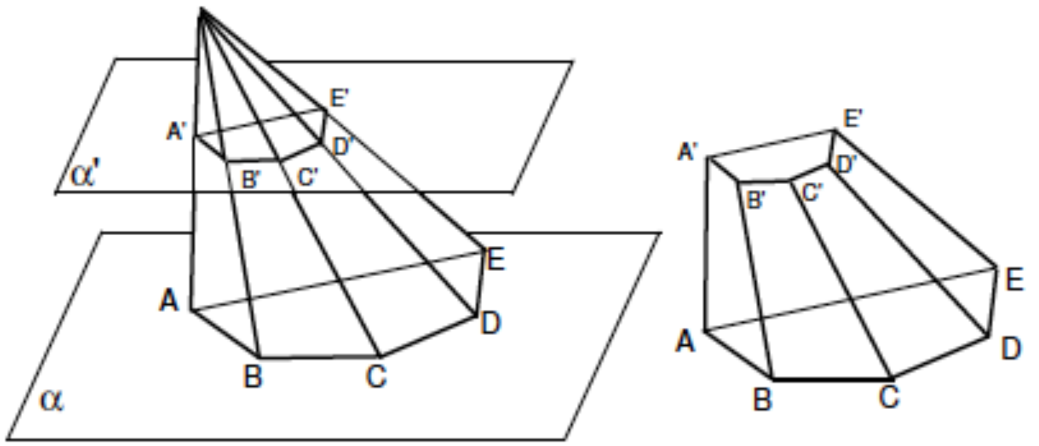
- A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas de suas faces laterais. A área total é a soma da área lateral com a área da base.

- Considere uma pirâmide regular cujo vértice é A e cuja base é um polígono $P = A_1A_2...A_n$. Chame de a o apótema da pirâmide.

$$
\begin{aligned}
\text{Área lateral} &= \text{Área}(AA_1A_2) + \text{Área}(AA_2A_3) + \ldots + \text{Área}(AA_nA_1) \\
&= \frac{1}{2}m(A_1A_2)a + \frac{1}{2}m(A_2A_3)a + \ldots + \frac{1}{2}m(A_nA_1)a \\
&= \frac{1}{2}\left[m(A_1A_2) + m(A_2A_3) + \ldots + m(A_nA_1)\right] a \\
&= \frac{1}{2}a(\text{perímetro de } P).
\end{aligned}
$$

Pirâmide

Considere agora uma pirâmide qualquer e suponha que a cortemos por um plano α' paralelo ao plano α da base. O plano α' divide a pirâmide em dois pedaços. A parte que não contém a base é de novo uma pirâmide, e já sabemos algumas coisas sobre ela.



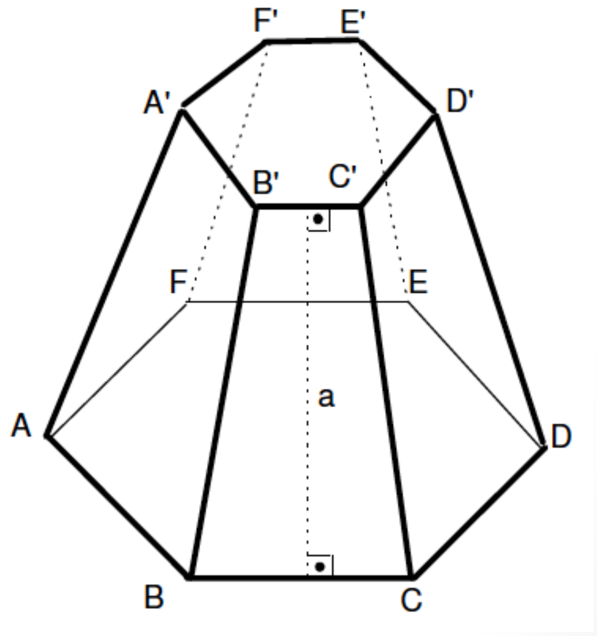
A parte que contém a base é chamada pirâmide truncada.

Pirâmide

- Em uma pirâmide truncada, as faces contidas nos planos paralelos são chamadas bases.

- As demais faces são as faces laterais, que são trapézios.

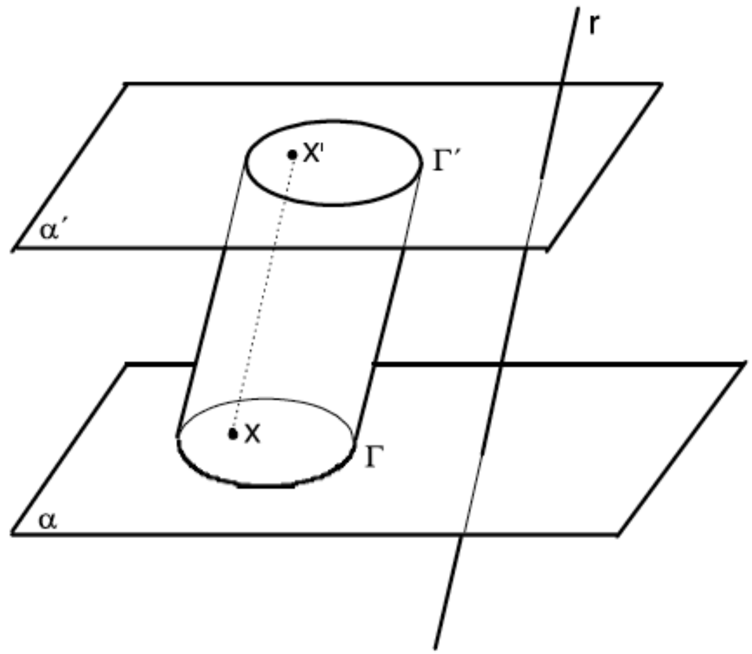
- A área lateral de um pirâmide truncada regular é o produto do apótema pela média aritmética dos perímetros das bases.



Cilindro

Cilindro

Sejam α e α' dois planos paralelos e Γ um círculo contido em α. Seja r uma reta que corta α e α'. Por cada ponto X pertencente a Γ ou ao seu interior, trace a reta paralela a r e seja X' o ponto em que essa reta intersecta α'. A união de todos os segmentos XX' é chamada de *cilindro circular*



Cilindro circular.

Cilindro - Elementos

- A interseção do cilindro com os planos paralelos são círculos de mesmo raio. Estes círculos são chamados **bases**.

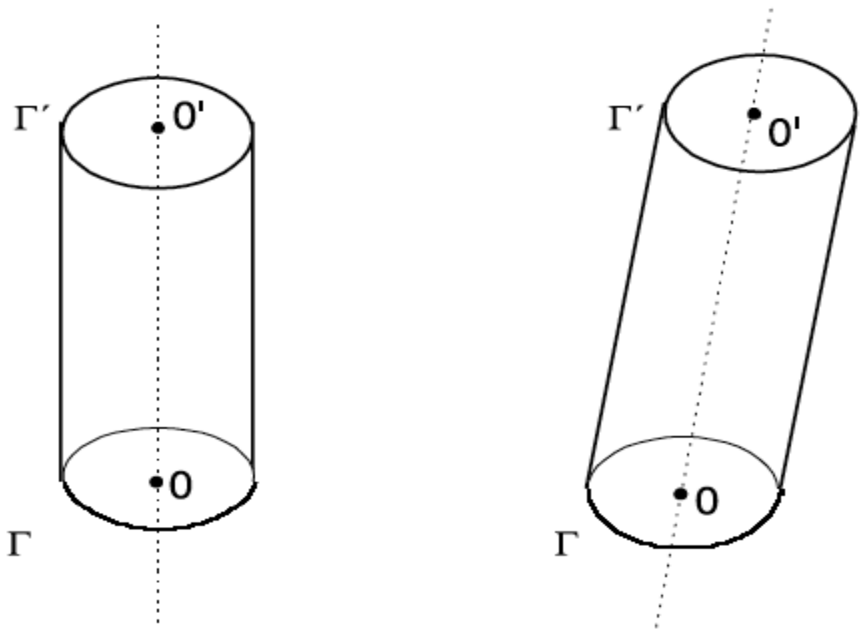
- Os segmentos XX' quando X e X' pertencem às bases são chamados **geratrizes**.

- A união das geratrizes de um cilindro é chamada de **superfície lateral**.

- A reta que passa por O e O' é chamada de **eixo** do cilindro.

Cilindro

- Um cilindro é chamado reto se o seu eixo for perpendicular às bases. Caso contrátio, o cilindro é chamado oblíquo.

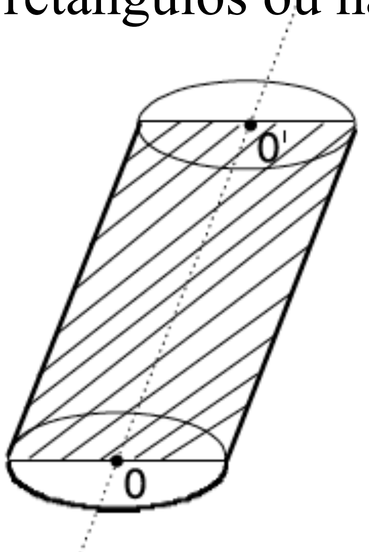


- A altura de um cilindro é a distância entre os planos das bases. Se o cilindro for reto, sua altura é exatamente a medida do segmento *OO'*.

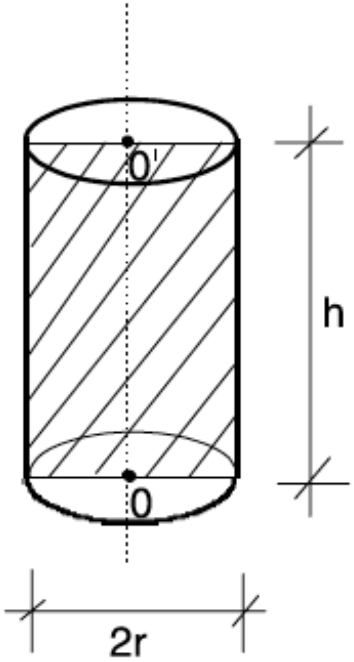
Cilindro

- Chamamos de seção meridiana de um cilindro à interseção do cilindro com um plano que contém o seu eixo.

- As seções meridianas de um cilindro são paralelogramos, que podem ser retângulos ou não.



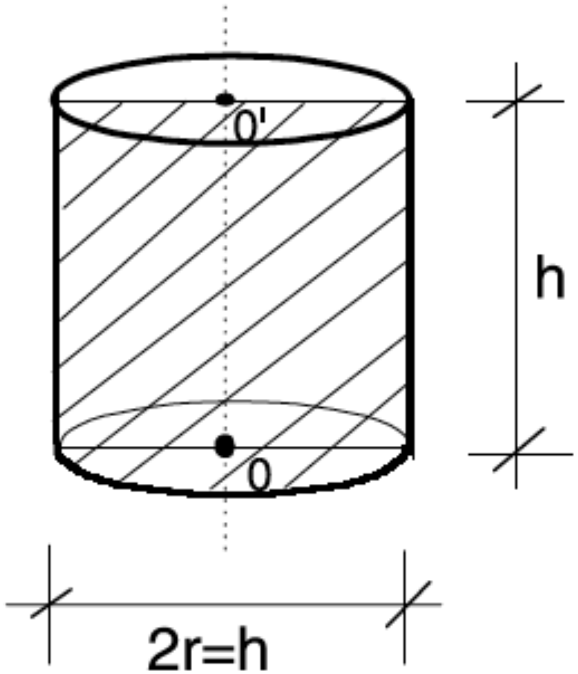
Cilindro oblíquo
Seção é paralelogramo



Cilindro reto
Seção é retângulo

Cilindro

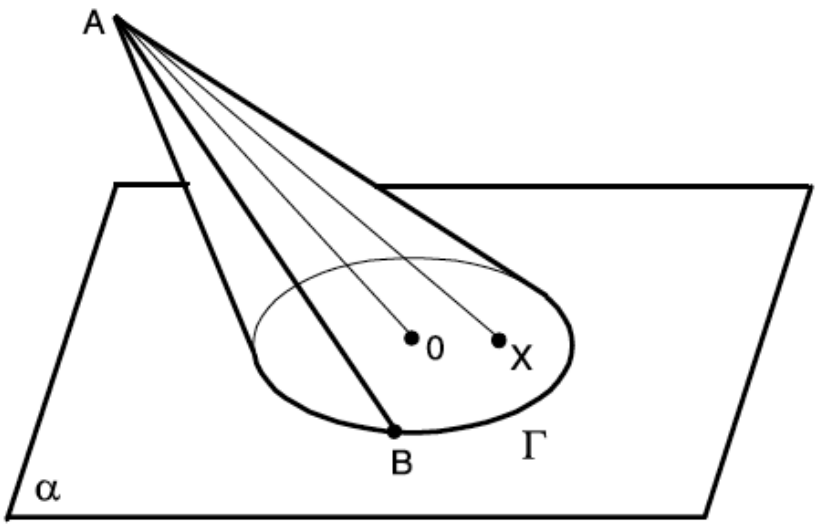
- Um cilindro é chamado equilátero se ele for reto e se sua seção meridiana for um quadrado.



Cone

Cone

Considere um círculo Γ contido em um plano α e seja A um ponto fora de α. Para cada ponto X pertencente a Γ ou ao seu interior, trace o segmento AX. A união dos segmentos AX é chamada de cone

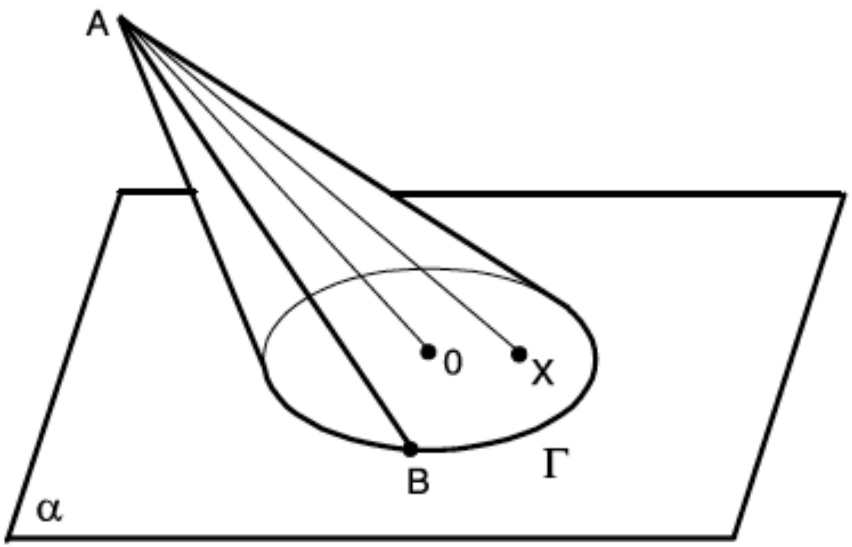


Cone - Elementos

- A união do círculo Γ com seu interior é chamada **base** do cone.

- O ponto A é chamado **vértice** do cone.

- O segmento que liga o vértice a um ponto de Γ é chamado **geratriz**.



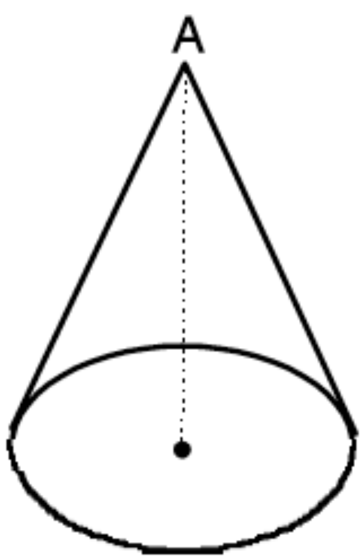
Cone - Elementos

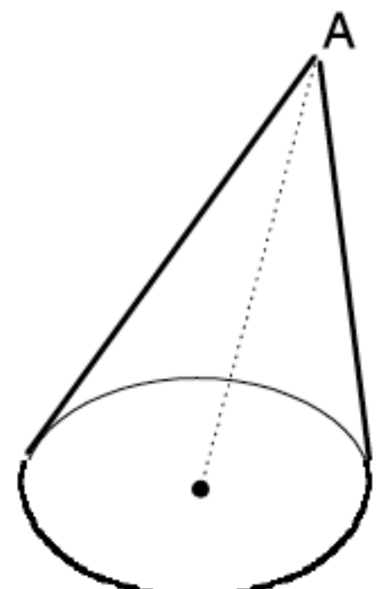
- A reta contendo o vértice e o centro O de Γ é chamada **eixo** do cone.

- A união das geratrizes é chamada **superfície lateral**.

- Um cone é chamado reto se o seu eixo for perpendicular ao plano da base. Caso contrário, é chamado oblíquo.

Cone reto





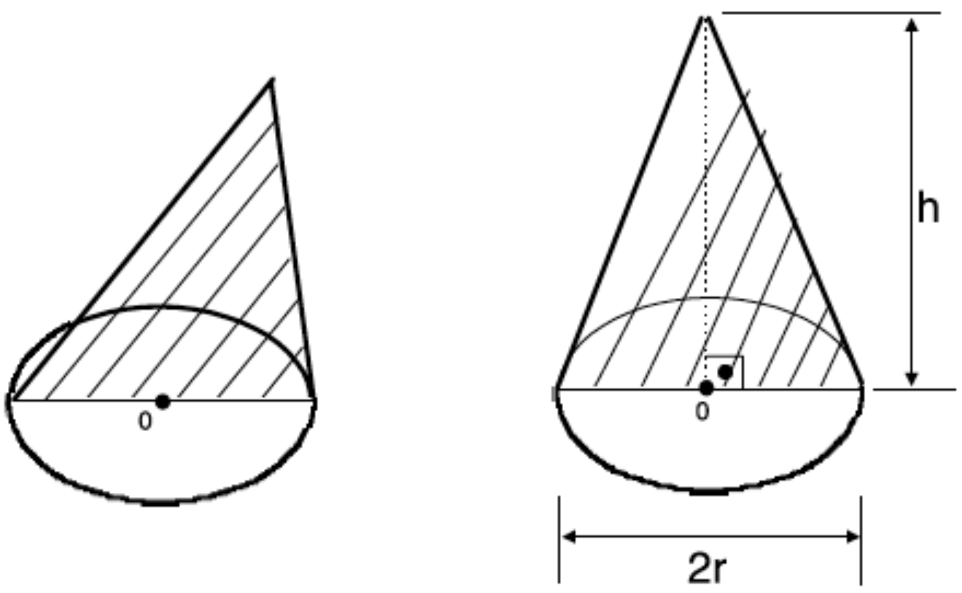
Cone oblíquo

Cone

- A altura do cone é a distância do vértice ao plano da base.

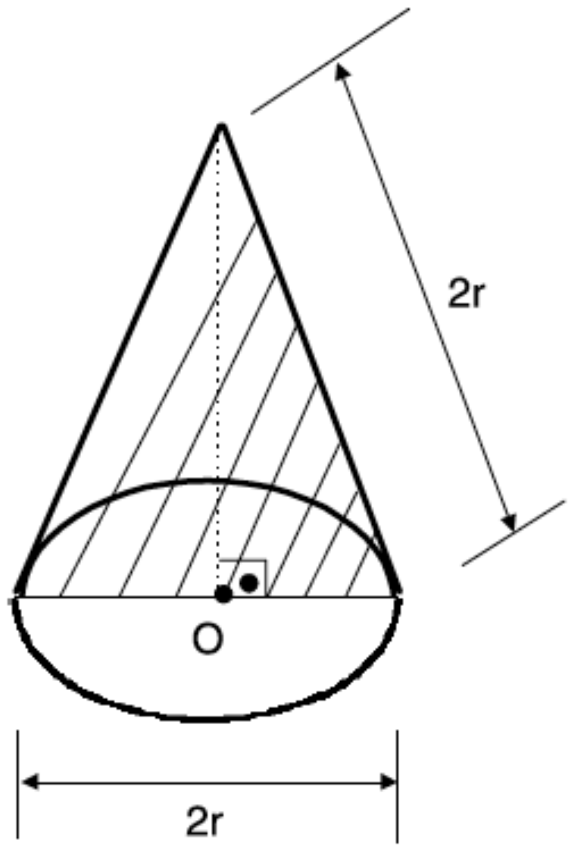
- A interseção do cone com um plano que contém seu eixo é chamada seção meridiana.

- As seções meridianas de um cone reto são triângulos isósceles congruentes.



Cone

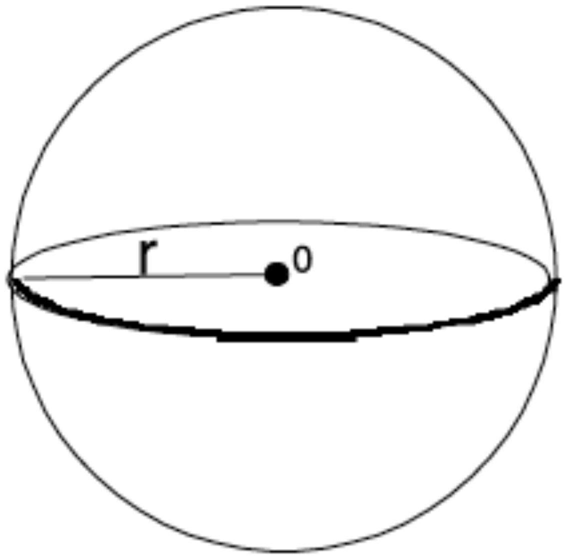
- Um cone é chamado equilátero se ele for reto e sua seção meridiana for um triângulo equilátero.



Esfera

Esfera

- Sejam *O* um ponto e *r* um número real positivo. Chamamos de esfera de centro *O* e raio *r* ao conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto *O* é *r*.



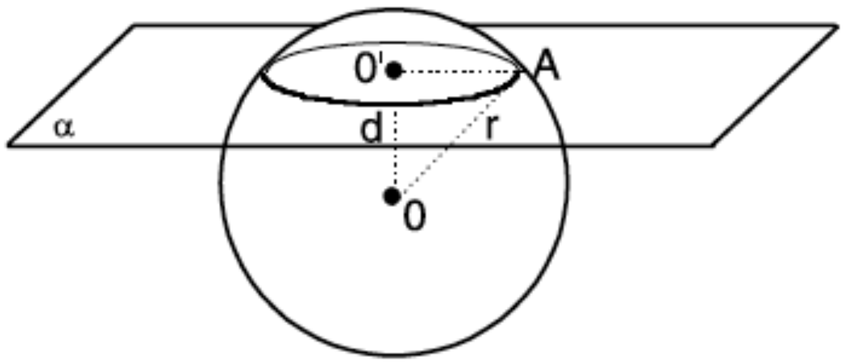
- Também chamamos de raio a todo segmento que liga *O* a um ponto da esfera.

- Se *A* e *B* são pontos da esfera tais que o segmento *AB* contém *O*, dizemos que *AB* é um diametralmente opostos.

- A região limitada pela esfera é o conjunto de pontos cuja distância ao ponto *O* é menor ou igual a *r*.

Esfera – Seções Planas

Considere a interseção de uma esfera de centro O e raio r com um plano α cuja distância ao centro da esfera seja um número d menor que r e considere um ponto A nessa interseção. O plano α é dito *secante* à esfera.



Pelo Teorema de Pitágoras temos

$$r^2 = m(OA)^2 = m(OO')^2 + m(O'A)^2 = d^2 + m(O'A)^2,$$

o que implica que

$$m(O'A) = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Esfera – Seções Planas

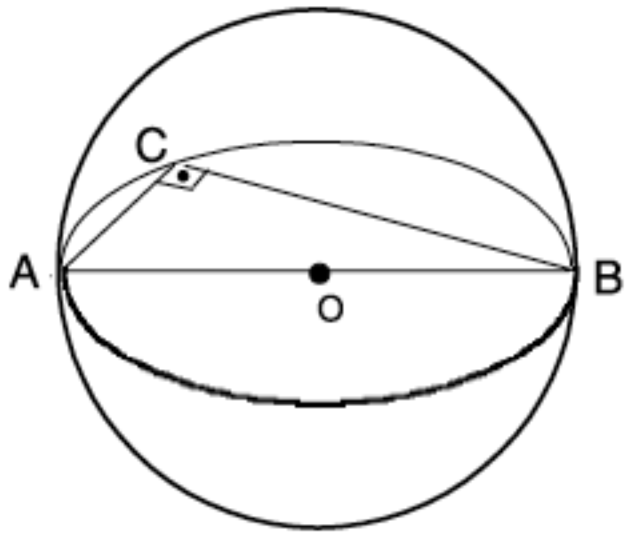
- Então, a interseção da esfera com α é o círculo contido em α , de centro *O'* e raio $\sqrt{r^2 - d^2}$.

- Se *d=0,* ou seja, se α passa por *O*, então a interseção da esfera com α é um círculo centrado em *O* e raio *r*. Este círculo é chamado círculo máximo.

- Conclusão: A interseção de um plano com uma esfera quando d<r é um círculo cujo centro é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da esfera.

Esfera

- Se A e B são pontos diametralmente opostos de uma esfera, B é o ponto da esfera mais distante de A, ou seja, para qualquer outro ponto C têm-se $m(AB)>m(AC)$.



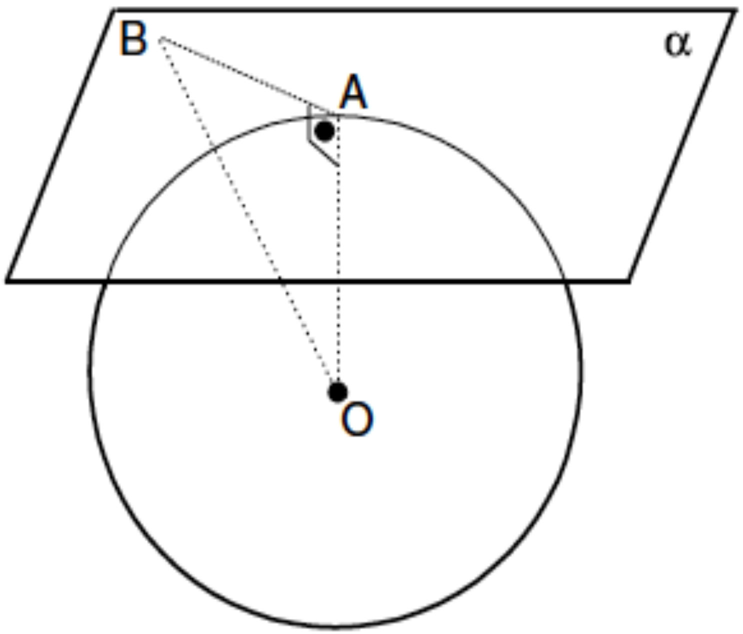
Esfera

- Considere agora uma esfera de centro O e raio r e tome A um ponto sobre ela. Chame de α o plano que passa por A e é perpendicular a OA.

- Para todo $B \neq A$ e pertencente a α, o triângulo ABO é retângulo em A, e , portanto, $m(OB) > m(OA) = r$.

- Assim, qualquer ponto de α, diferente do ponto A, está fora da esfera.

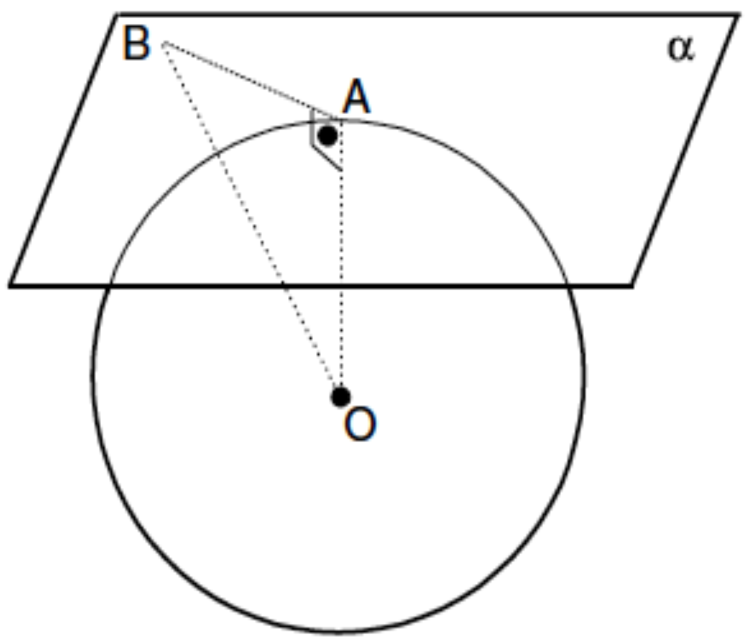
- Neste caso, α é *tangente* à esfera em A.



Esfera

- **Conclusão**: Se um plano é perpendicular a um raio de uma esfera em sua extremidade, então ele é tangente à esfera.

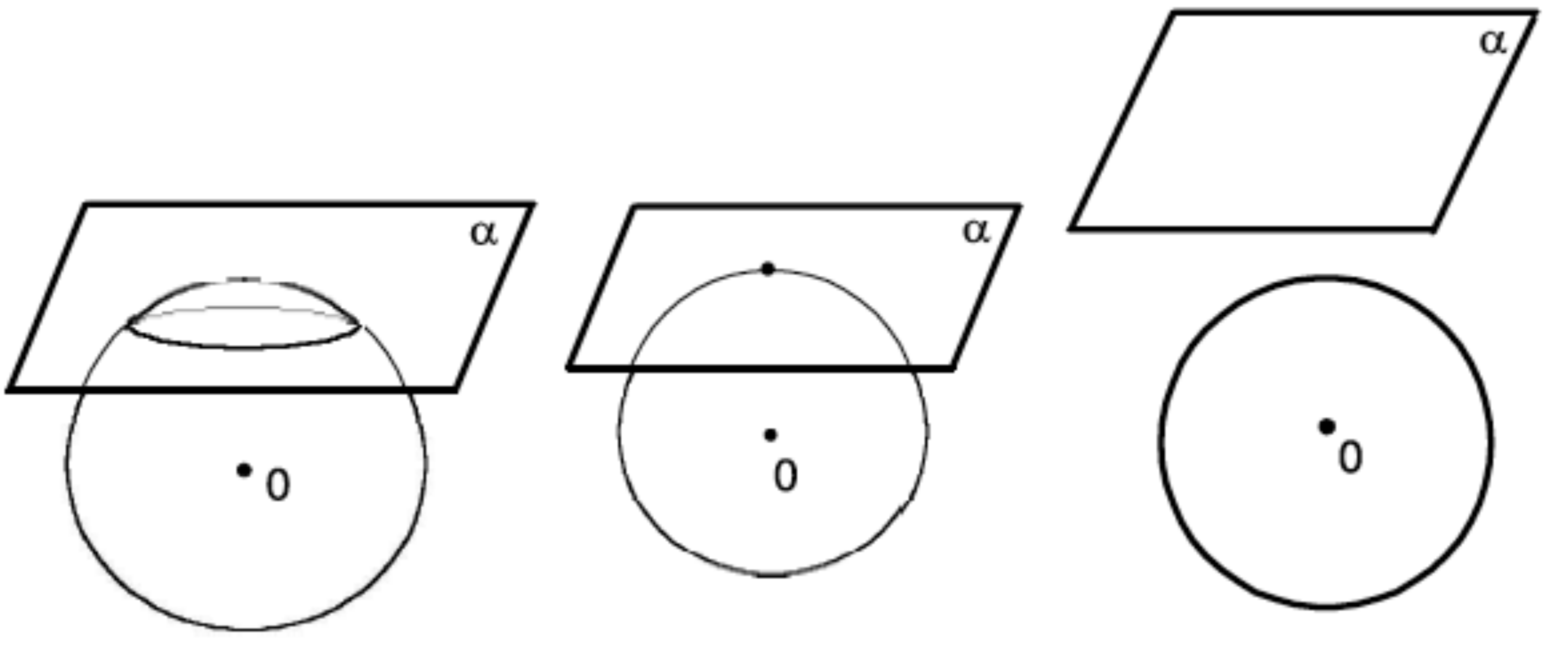
E vale também a volta: se um plano é tangente a uma esfera, então ele é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência.



Esfera

- Há ainda uma terceira posição relativa entre uma esfera e um plano.

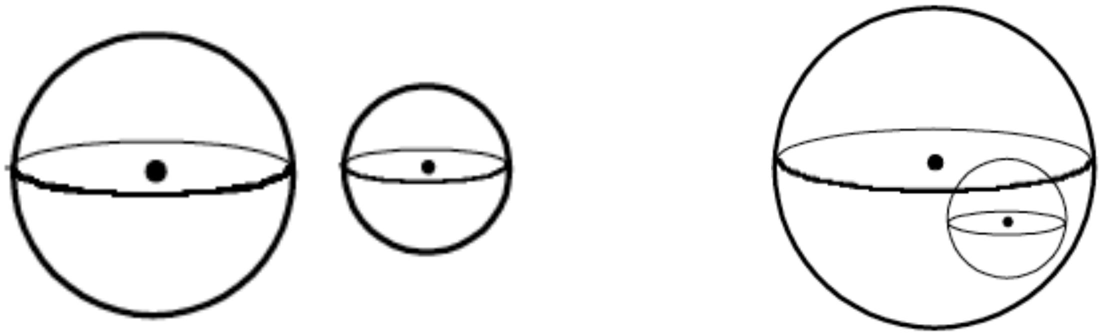
- Se a distância entre o centro da esfera e o plano for maior que o raio da esfera, então eles não se intersectam, e o plano é chamado de exterior.



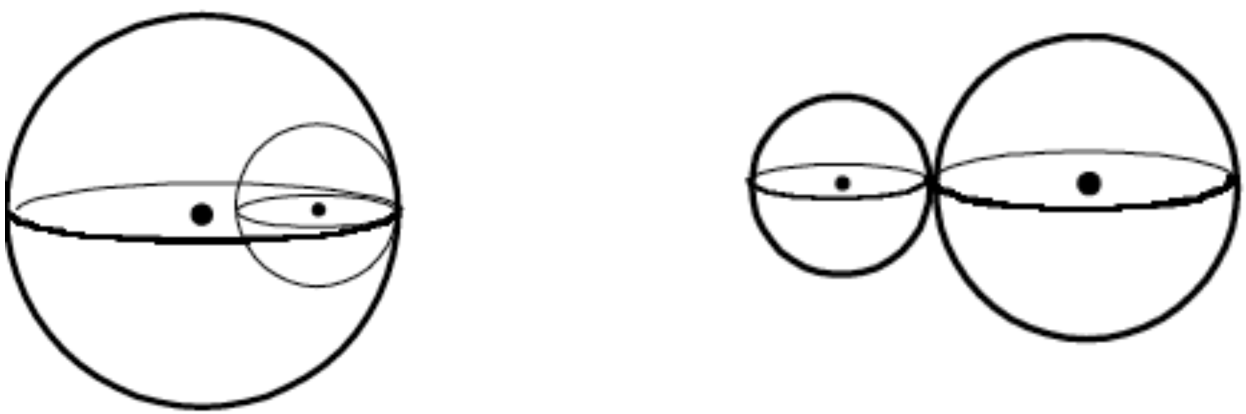
Posição relativa entre esferas

- Duas esferas são ditas:

✧ disjuntas, quando não têm nenhum ponto em comum.

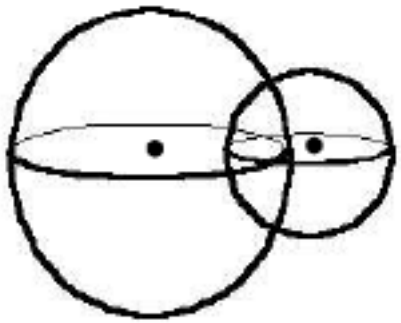


✧ tangentes, quando tem um ponto em comum.



Esfera

- secantes quando se intersectam em mais de um ponto.



- Pode-se mostrar que a interseção entre duas esferas secantes é um círculo. O centro desse círculo pertence à reta que contém os centros das esferas.

Poliedros

Poliedros

- Poliedros é a reunião de um número finito de polígonos planos, chamados faces tais que:

- cada lado desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono;

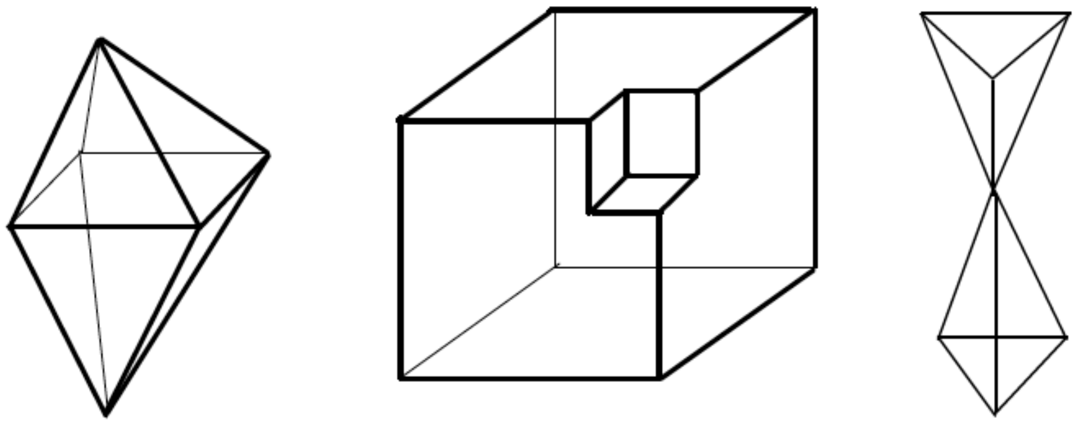
- a interseção de dois polígonos quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice comum, ou é vazia.

Lado do polígono = Aresta do poliedro

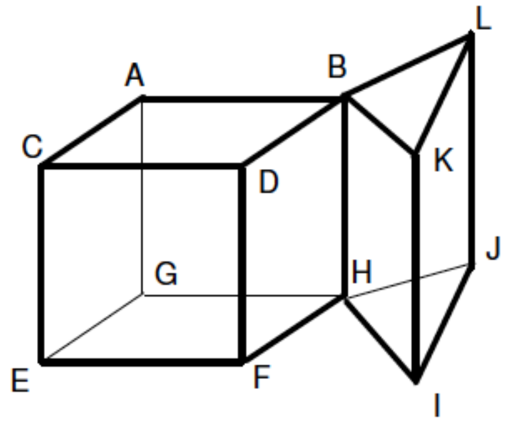
Vértice do polígono = Vértice do poliedro

Poliedros

- Prismas e pirâmides são poliedros.
- As figuras abaixo são poliedros.



- A figura abaixo não é poliedro. Por que ?



Poliedros

- Um conjunto C do espaço é chamado de convexo, se para quaisquer dois pontos A e B pertencentes a C, o segmento AB está inteiramente contido em C.

- Um poliedro é chamado convexo se o seu interior for um conjunto convexo.

✓ Todos os prismas e pirâmides são poliedros convexos.

Poliedros

- Vamos agora contar o número de arestas (A), vértices (V) e de faces (F) de alguns poliedros convexos.

✓ Prisma com base de n lados:

$$\begin{cases} V = 2n \\ A = 3n \\ F = n+2 \end{cases} \Rightarrow V - A + F = 2n - 3n + n + 2 = 2$$

Poliedros

- ✓ Pirâmide com base de n lados:

$$\begin{cases} V = n+1 \\ A = 2n \\ F = n+1 \end{cases} \Longrightarrow V - A + F = n + 1 + 2n + n + 1 = 2$$

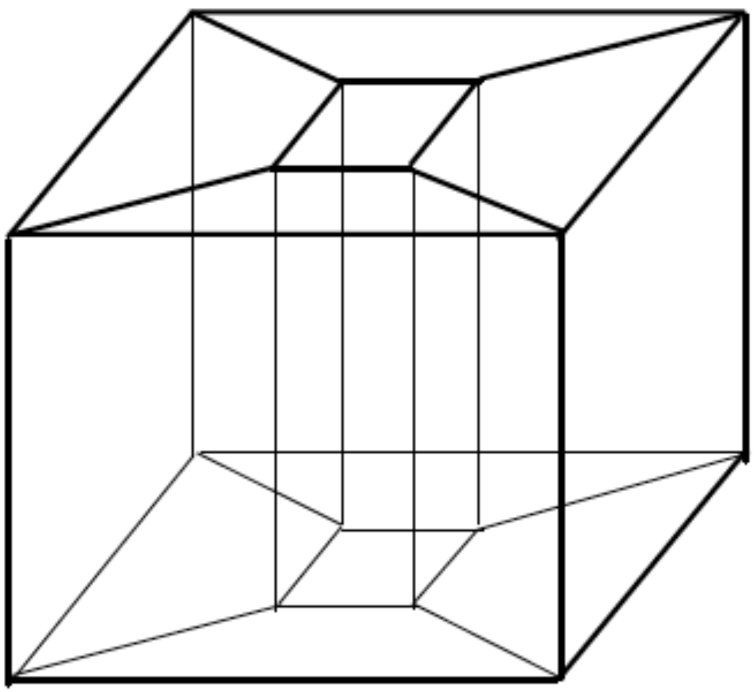
- Teorema de Euler: Para todo poliedro convexo tem-se que

$$V - A + F = 2,$$

onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

Poliedros

- No caso de poliedros não convexos, a fórmula de Euler pode valer ou não. Vejamos o exemplo:



$$\begin{cases} V=16 \\ A = 32 \\ F = 16 \end{cases}$$

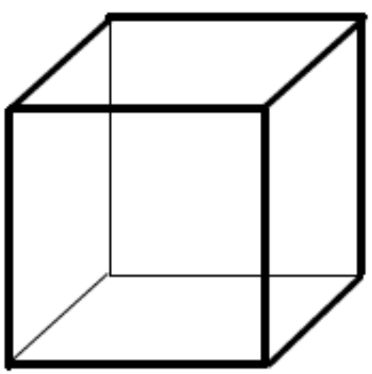
$$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$$

Poliedros Regulares

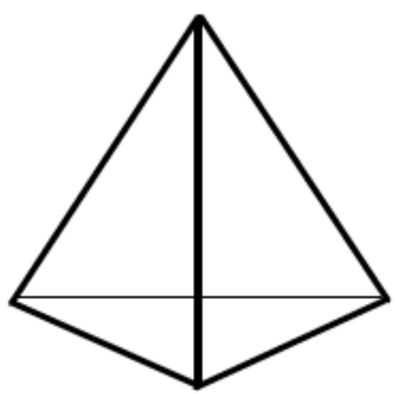
- Poliedro regular é um poliedro convexo em que as faces são polígonos regulares congruentes e que em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

- Exemplos:

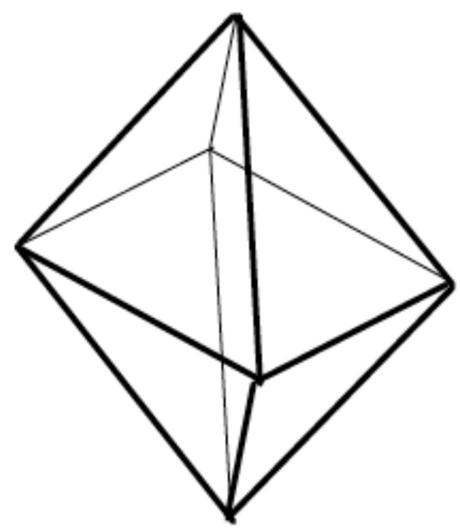
Cubo



Tetraedro regular

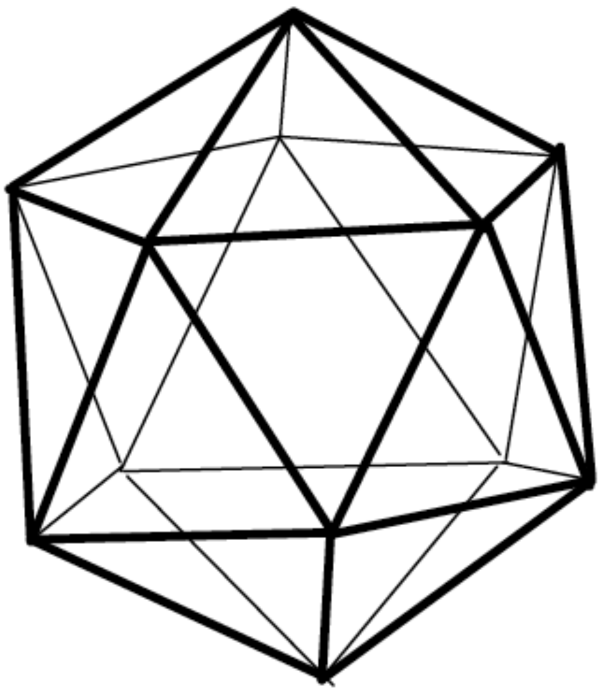


Octaedro regular

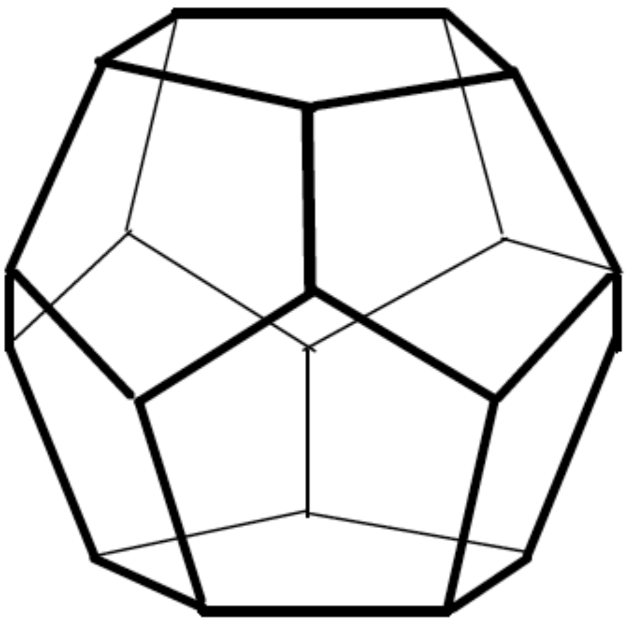


Poliedros Regulares

Icosaedro regular



Dodecaedro regular



- Teorema: Existem apenas cinco poliedros regulares.

Volume

Volume

- A noção de volume de um sólido está relacionada ao espaço por ele ocupado.

- A determinação do volume dos sólidos será feita com base nas três propriedades a seguir:

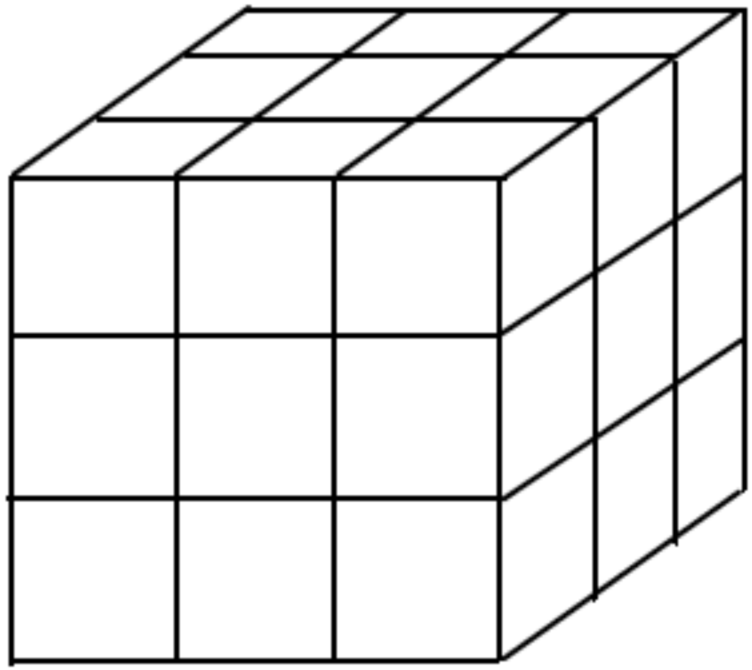
✓ P1: A todo sólido no espaço está associado um número real positivo, chamado seu volume.

✓ P2: Sólidos congruentes têm o mesmo volume (por exemplo, dois cilindros retos de mesma base e mesma altura).

✓ P3: Se um sólido S é dividido em dois sólidos S_1 e S_2, então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 e S_2.

Volume do paralelepípedo

- Considere um cubo de lado 1 como unidade de volume e divida cada uma de suas arestas em n partes iguais, obtendo n^3 cubinhos justapostos, todos de aresta medindo 1/n.



Exemplo: 27 cubos menores de arestas 1/3

Volume do paralelepípedo

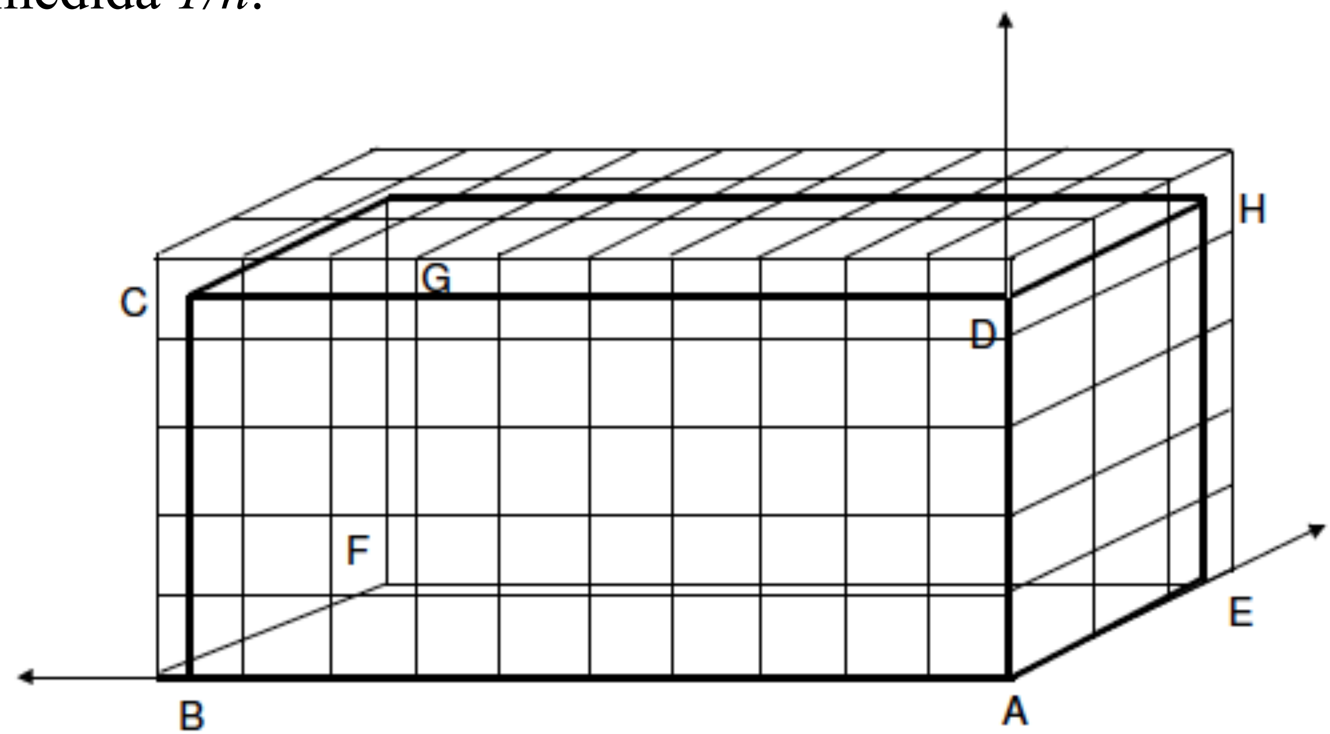
- Pela propriedade P2 (vista anteriormente), todos os n^3 cubinhos tem o mesmo volume e pela propriedade P3, o volume do cubo original é a soma dos volumes dos n^3 cubinhos.

- Segue que o volume de cada cubinho é $1/n^3$.

Volume do paralelepípedo

- Qual o volume de um paralelepípedo regular *ABCDEFGH* cujas arestas medem *a, b* e *c* ?

- Tome um vértice qualquer do paralelepípedo e considere as semirretas que partem desse vértice e contêm arestas do paralelepípedo. Sobre essas semirretas, marque segmentos de medida *1/n*.



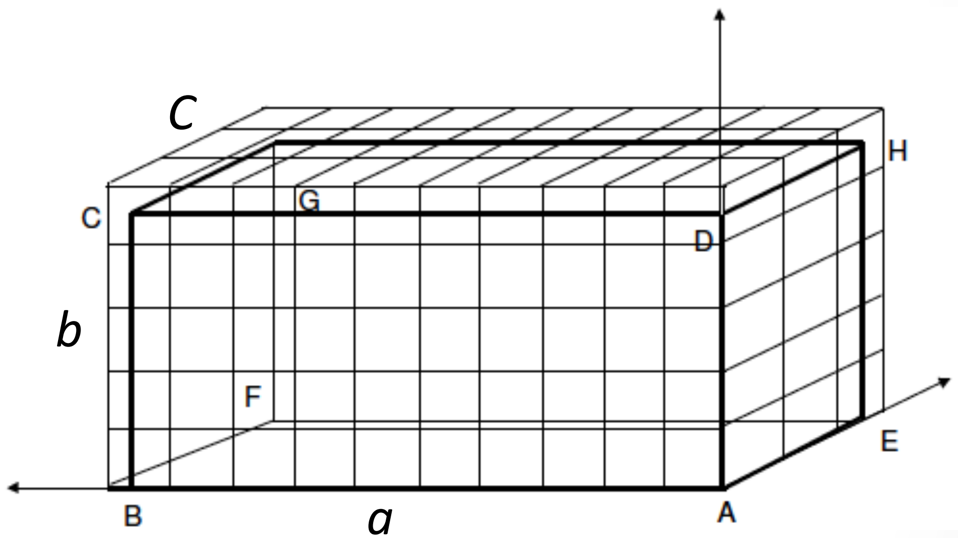
Volume do paralelepípedo

- Seja *p* o número de segmentos de medida *1/n* que cabem em AB, *q* o número de segmentos de medida *1/n* que cabem em AD e *s* o número de segmentos de medida *1/n* que cabem em AE.

$$p.\frac{1}{n} \leq a < (p+1)\frac{1}{n}$$

$$q.\frac{1}{n} \leq b < (q+1)\frac{1}{n}$$

$$s.\frac{1}{n} \leq c < (s+1)\frac{1}{n}$$



- Logo,

$$pqs\frac{1}{n^3} \leq abc < (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3}$$

Volume do paralelepípedo

- Por outro lado, o paralelepípedo regular cujas arestas medem *p/n*, *q/n* e *s/n* está inteiramente contido em *ABCDEFGH* e é formado por *pqs* cubinhos de aresta *1/n*, cujo volume é $1/n^3$. Daí,

$$V \geq psq\frac{1}{n^3}$$

- Além disso, o paralelepípedo regular cujas arestas medem *(p+1)/n*, *(q+1)/n* e *(s+1)/n* contém *ABCDEFGH* é formado por *(p+1)(q+1)(s+1)* cubinhos de aresta *1/n*. Então,

$$V < (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3}$$

- Portanto,

$$pqs\frac{1}{n^3} \leq V < (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3}$$

Volume do paralelepípedo

$$
\begin{aligned}
|\, V - abc \,| &< (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3} - pqs\frac{1}{n^3} \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{pq}{n^2} + \frac{ps}{n^2} + \frac{qs}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{q}{n^2} + \frac{s}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Como $\dfrac{p}{n} \leq a$, $\dfrac{q}{n} \leq b$ e $\dfrac{s}{n} \leq c$, resulta que

$$
\begin{aligned}
|\, V - abc \,| &< \frac{1}{n}\left(ab + ac + bc + \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&< \frac{1}{n}(ab + ac + bc + a + b + c + 1)
\end{aligned}
$$

Volume do paralelepípedo

- Como a desigualdade anterior é válida para qualquer n, temos que $V=abc$.

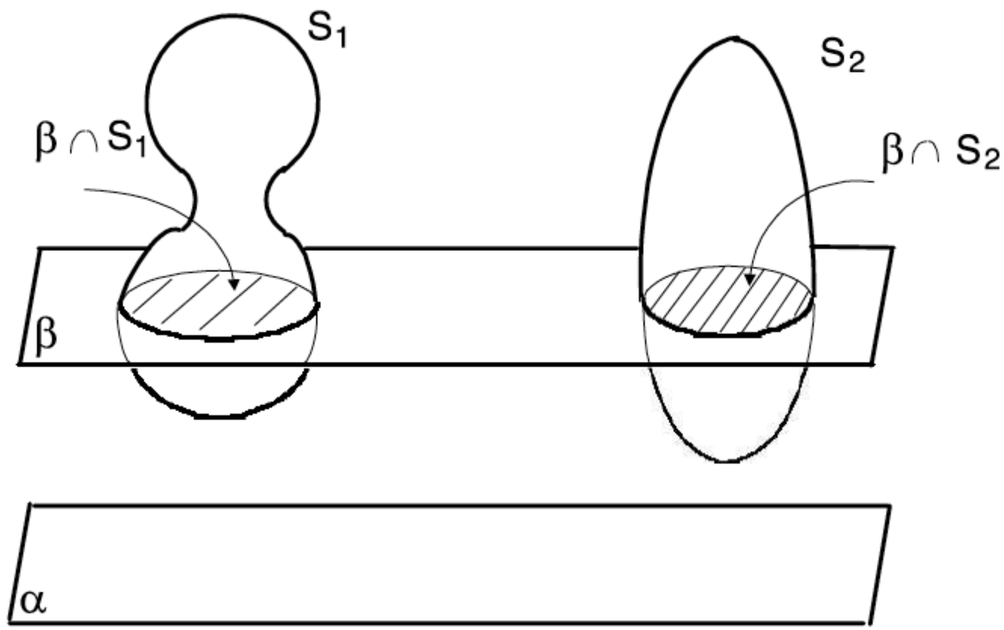
Provamos então que o volume do paralelepípedo retangular é o produto da área da base pela altura.

- Pela propriedade P2, o volume de um paralelepípedo qualquer é igual ao do paralelepípedo retangular.

Princípio de Cavalieri

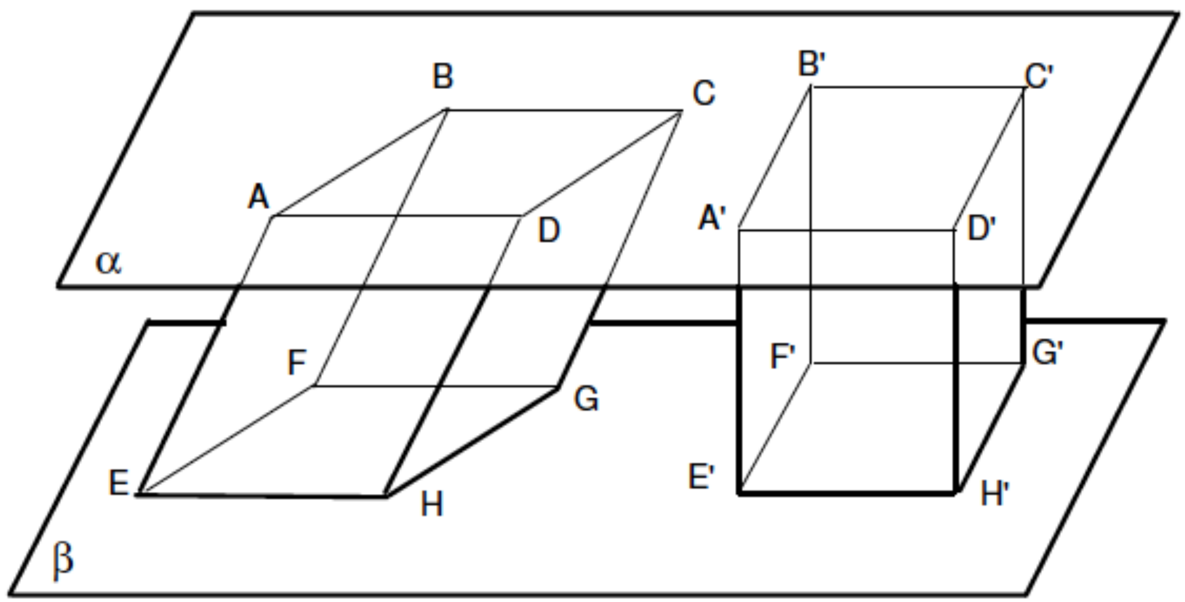
- Princípio de Cavalieri: Considere dois sólidos S_1 e S_2 e um plano α. Suponha que, para todo β paralelo a α, as seções planas determinadas por β em S_1 e S_2 têm a mesma área. Então,

$$\text{Volume}(S_1) = \text{Volume}(S_2)$$



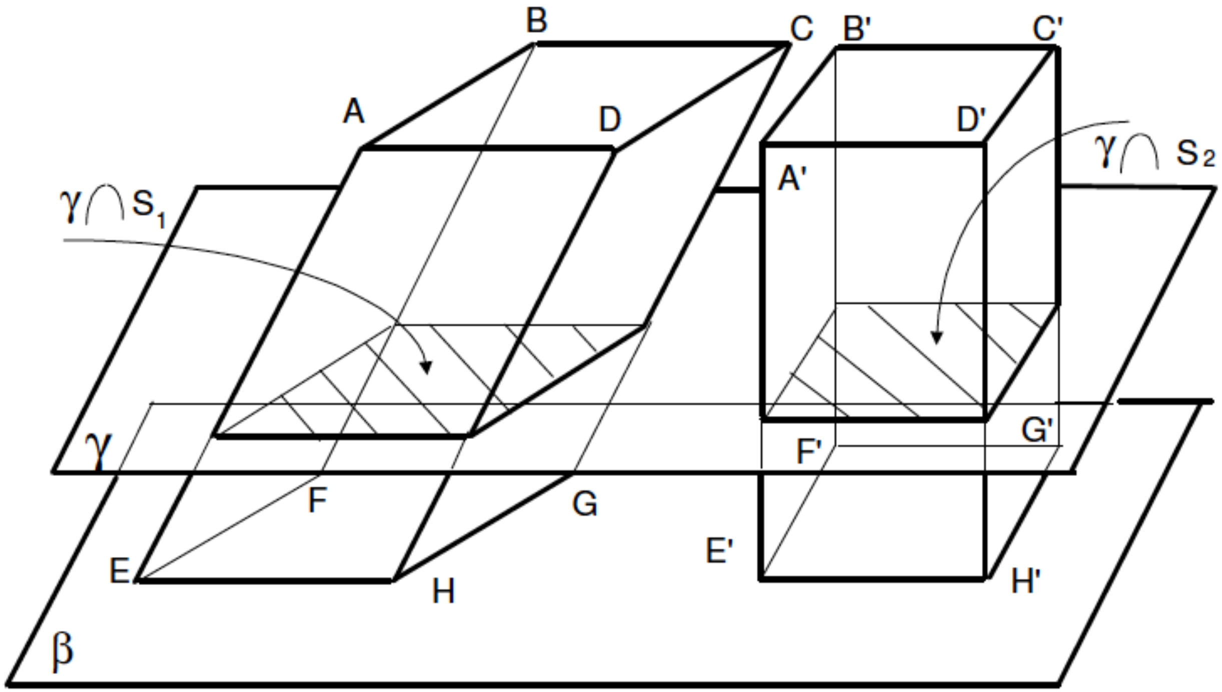
Volume de um paralelepípedo qualquer

- Sejam $S_1 = ABCDEFGH$ um paralelepípedo qualquer, α e β os planos das faces *ABCD* e *EFGH*.



Volume de um paralelepípedo qualquer

- No plano α, tome um retângulo A'B'C'D' que tem a mesma área que ABCD e pelos pontos A', B', C' e D' trace perpendiculares a α. Essas retas cortam o plano β em pontos E', F', G' e H'. O paralelepípedo S_2=A'B'C'D'E'F'G'H' obtido é retangular.



$\gamma \cap S_1$ e $\gamma \cap S_2$ têm a mesma área.

Volume de um paralelepípedo qualquer

Logo,

$$\text{Área}(\gamma \cap S_1) = \text{Área}(EFGH) = \text{Área}(E'F'G'H') = \text{Área}(\gamma \cap S_2)$$

para todo plano γ paralelo a β.

Pelo Princípio de Cavalieri tem-se

$$Vol(S_1) = Vol(S_2)$$

Como já sabemos que o volume de um paralelepípedo retangular é o produto da área da base pela altura, temos

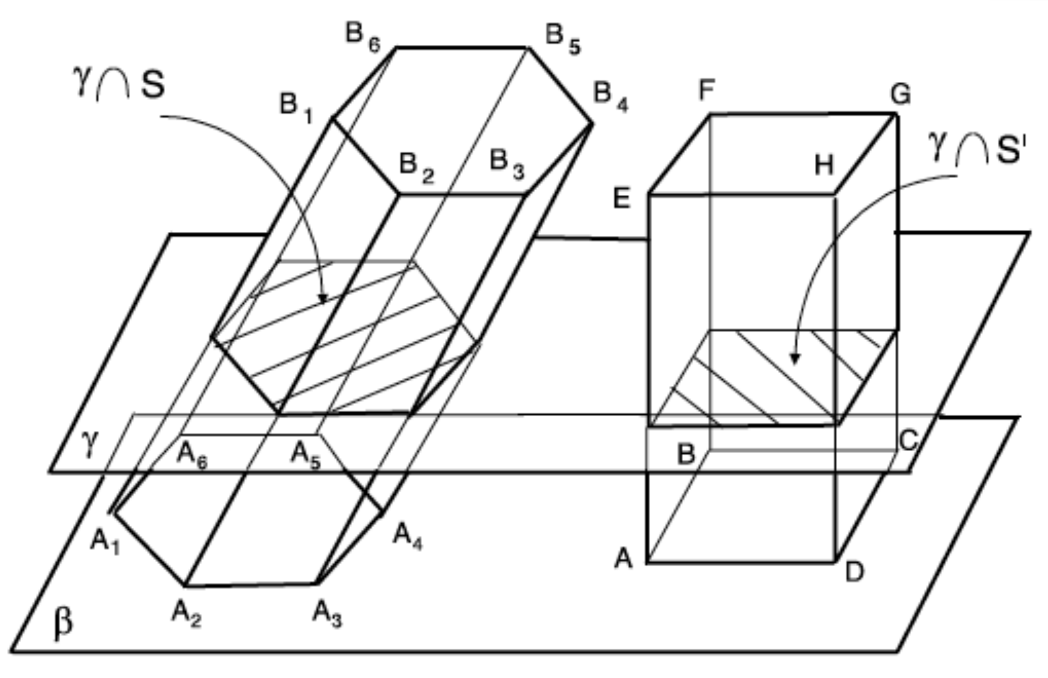
$$Vol(S_1) = Vol(S_2) = \text{Área}(E'F'G'H')m(A'E') = \text{Área}(EFGH).altura(S_1)$$

Volume do prisma

- Seja S um prisma cuja base é um polígono P qualquer.

- No plano da base, considere um retângulo $ABCD$ de área igual a área de P. Sobre esse retângulo construa um paralelepípedo retangular S' de altura igual à altura de S.

- Seja γ um plano paralelo à base de S e que é secante a S.



Volume do prisma

Sabemos que $\gamma \cap S$ é congruente a P e que $\gamma \cap S'$ é congruente a $ABCD$. Logo,

$$\text{Área}(\gamma \cap S) = \text{Área}(P) = \text{Área}(ABCD) = \text{Área}(\gamma \cap S')$$

para todo plano γ paralelo à base de S.

Pelo Princípio de Cavalieri, tem-se

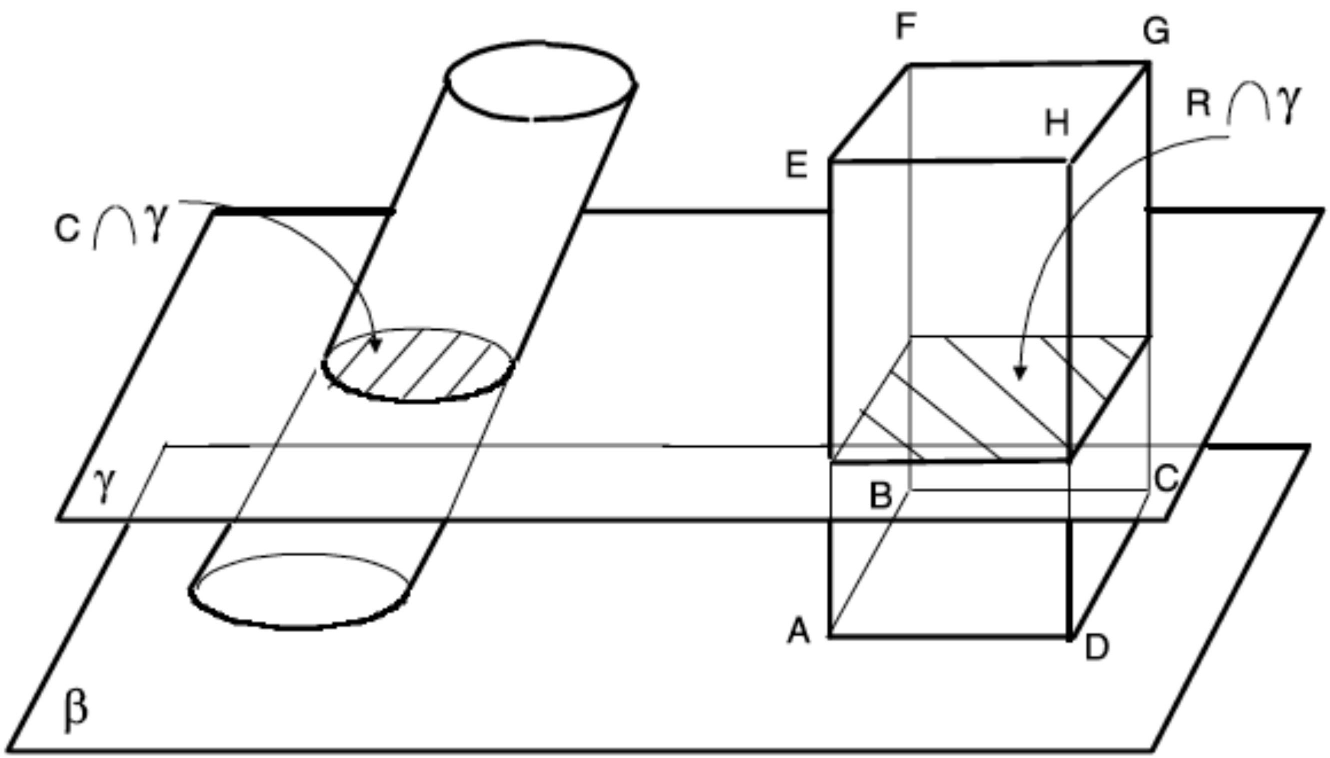
$$Vol(S) = Vol(S') = \text{Área}(ABCD).m(AE).$$

Provamos então que

O volume de um prisma é o produto da área da base pela altura.

Volume do cilindro

- Seja C um cilindro reto ou oblíquo de altura h e cuja base é um círculo Γ.



Volume do cilindro

Para todo plano γ, paralelo a α e secante a C, tem-se

$$\text{Área}(C \cap \gamma) = \text{Área}(\Gamma) = \text{Área}(ABCD) = \text{Área}(R \cap \gamma).$$

Pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que

$$Vol(C) = Vol(R) = \text{Área}(\text{ABCD}).m(AE) = \text{Área}(\Gamma).\text{altura}(C).$$

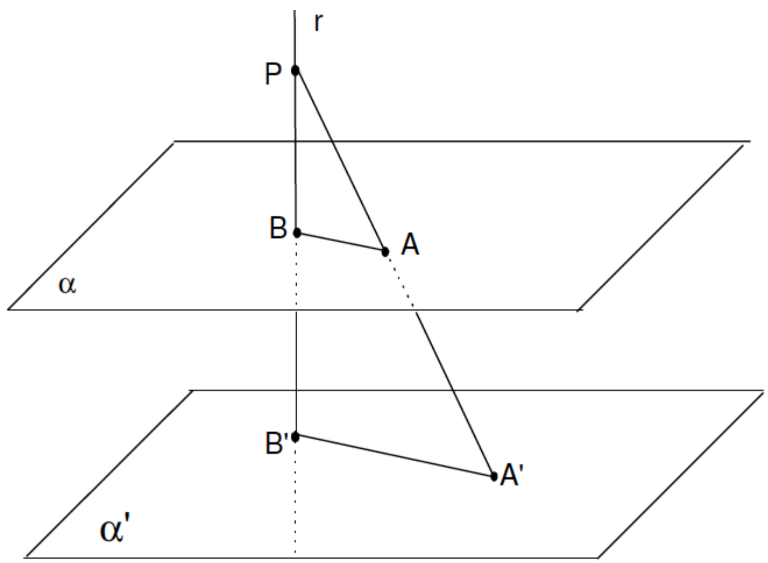
Provamos então que

O volume de um cilindro é o produto da área de sua base pela altura.

Volume da pirâmide

- Proposição: Sejam α e α' planos paralelos e *P* um ponto não situado entre α e α'. Sejam *d* e *d'* as distâncias de *P* a α e α', respectivamente. Para todo ponto *A* pertencente a α, seja *A'* a interseção da semirreta *PA* com α'. Então

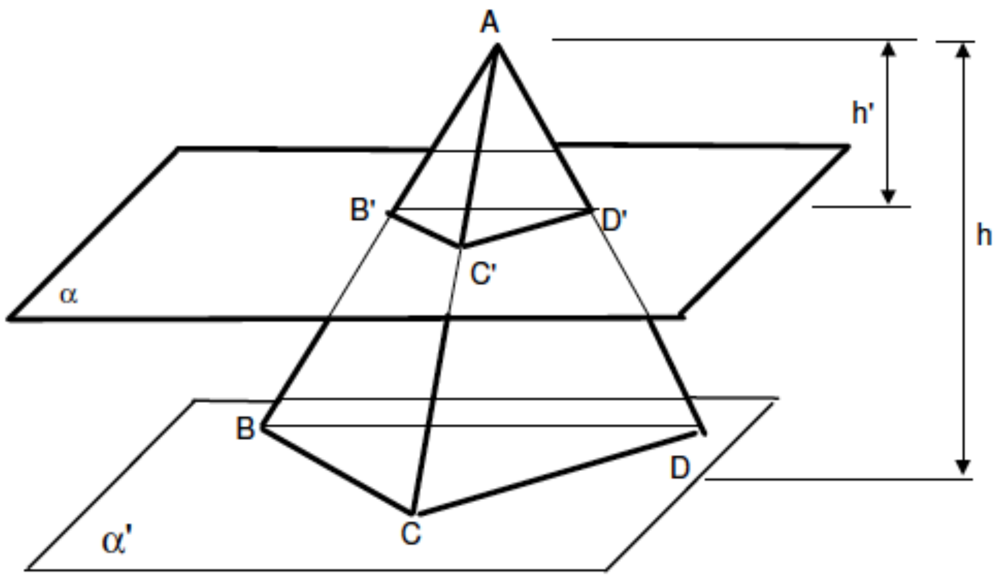
$$\frac{m(PA)}{m(PA')} = \frac{d}{d'} \ , \quad \text{para todo } A \in \alpha.$$



Volume da pirâmide

- Considere agora uma pirâmide *ABCD* e seja h a sua altura em relação à face *BCD*. Lembre-se que *h* é a distância de *A* ao plano α que contém BCD. Seja α' um plano paralelo a α e que corta a pirâmide segundo o triângulo *B'C'D'*. Chame *h'* a distância de *A* ao plano α'. Então

$$\frac{m(AB')}{m(AB)} = \frac{m(AC')}{m(AC)} = \frac{m(AD')}{m(AD)} = \frac{h'}{h}.$$



Volume da pirâmide

- Pelo segundo caso de semelhança, temos que

$$AB'C' \sim ABC,\ AC'D' \sim ACD \text{ e } AB'D' \sim ABD$$

com razão de semelhança *h'/h*. Logo,

$$\frac{m(B'C')}{m(BC)} = \frac{m(C'D')}{m(CD)} = \frac{m(B'D')}{m(BD)} = \frac{h'}{h}.$$

Segue pelo terceiro caso de semelhança, temos que

$$B'C'D' \sim BCD$$

com razão de semelhança h'/h. Daí,

$$\frac{\text{Área}(B'C'D')}{\text{Área}(BCD)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Volume da pirâmide

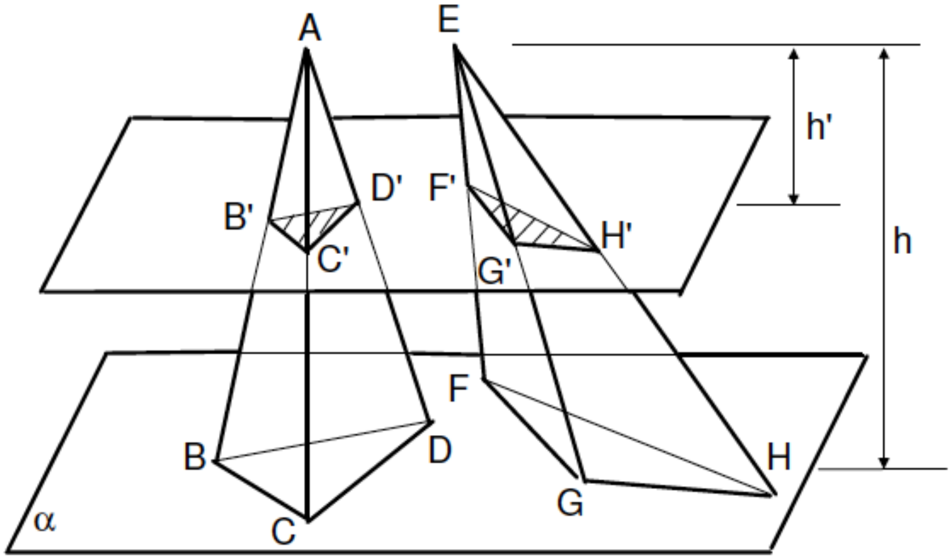
- Acabamos de provar:

Seja *ABCD* uma pirâmide de altura *h* em relação à face *BCD*. Seja α' um plano paralelo ao plano da face *BCD* e que corta a pirâmide segundo um triângulo *B'C'D'*. Chame de *h'* a altura da pirâmide *AB'C'D'* em relação a *B'C'D'*. Então *B'C'D'* é semelhante a *BCD* e

$$\frac{\text{Área}(B'C'D')}{\text{Área}(BCD)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Volume da pirâmide

- Sejam *ABCD* e *EFGH* dois tetraedros tais que Área(*BCD*) = Área(*FGH*) e tais que as alturas em relação às bases *BCD* e *FGH* são iguais a *h*. Considere que as duas pirâmides estão situadas sobre um plano α. Seja α' um plano paralelo a α e que secciona as pirâmides segundo os triângulos *B'C'D'* e *F'G'H'*.



Volume da pirâmide

- Neste caso,

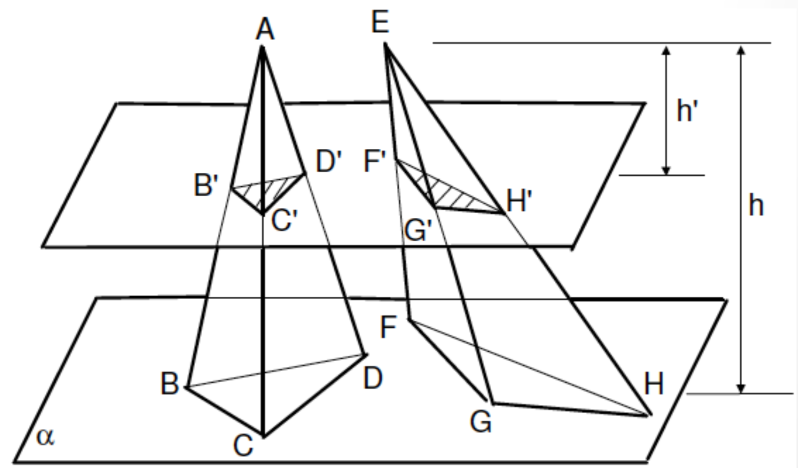
$$\frac{\text{Área}(B'C'D')}{\text{Área}(BCD)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{\text{Área}(F'G'H')}{\text{Área}(FGH)}$$

- Mas, Área(*BCD*) = Área(*FGH*), então

$$\text{Área(B'C'D')} = \text{Área(F'G'H')}$$

- Pelo Princípio de Cavalieri,

Conclui-se que *ABCD* e *EFGH* têm o mesmo volume.



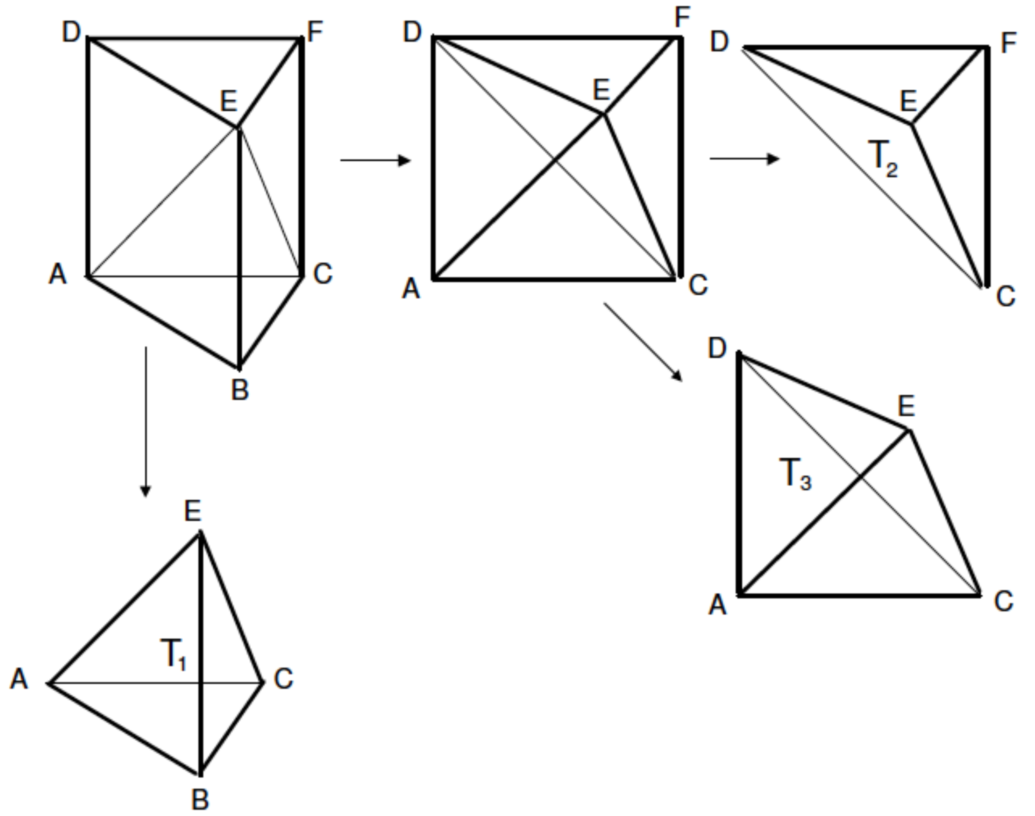
Volume da pirâmide

- Provamos então que

$$\boxed{\text{Se dois tetraedros (pirâmides triangulares) têm a mesma altura e mesma área da base, então eles têm o mesmo volume.}}$$

Volume da pirâmide

- Considere um prisma triangular reto *ABCDEF*. Divida este prisma da seguinte maneira:



Volume da pirâmide

- T2 e T3 tem a mesma área da base e mesma altura. Logo, seus volumes são iguais.

- T1 e T2 tem a mesma área da base e mesma altura. Logo, seus volumes são iguais.

- Logo,

$$Vol(T_1) = Vol(T_2) = Vol(T_3) = \frac{1}{3}Vol(ABCDEF) = \frac{1}{3}\text{Área}(\text{ABC})\text{m}(\text{BE})$$

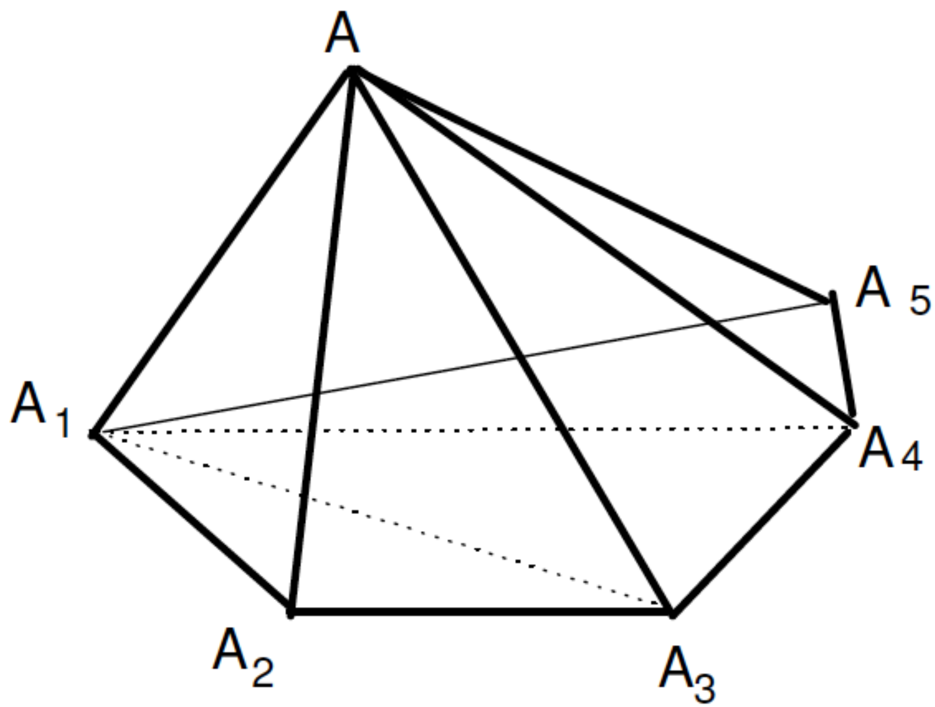
- Provamos então que,

O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto da área da base pela altura.

Volume da pirâmide

- Considere uma pirâmide S de altura h com vértice A e cuja base é um polígono $P = A_1A_2...A_n$.

- S pode ser dividida em n-2 tetraedros.



Volume da pirâmide

- A altura de cada tetraedro é igual à altura de *S*. Logo,

$$\begin{aligned}
Vol(S) &= Vol(AA_1A_2A_3) + Vol(AA_1A_3A_4) + \ldots + Vol(AA_1A_{n-1}A_n) \\
&= \frac{1}{3}\text{Área}(A_1A_2A_3)h + \frac{1}{3}\text{Área}(A_1A_3A_4)h + \ldots + \frac{1}{3}\text{Área}(A_1A_{n-1}A_n)h \\
&= \frac{1}{3}h(\text{Área}(A_1A_2A_3) + \text{Área}(A_1A_3A_4) + \ldots + \text{Área}(A_1A_{n-1}A_n) \\
&= \frac{1}{3}h\text{Área(P)}
\end{aligned}$$

- Acabamos de provar que:

O volume de uma pirâmide é um terço do produto da altura pela área da base.

Volume do cone

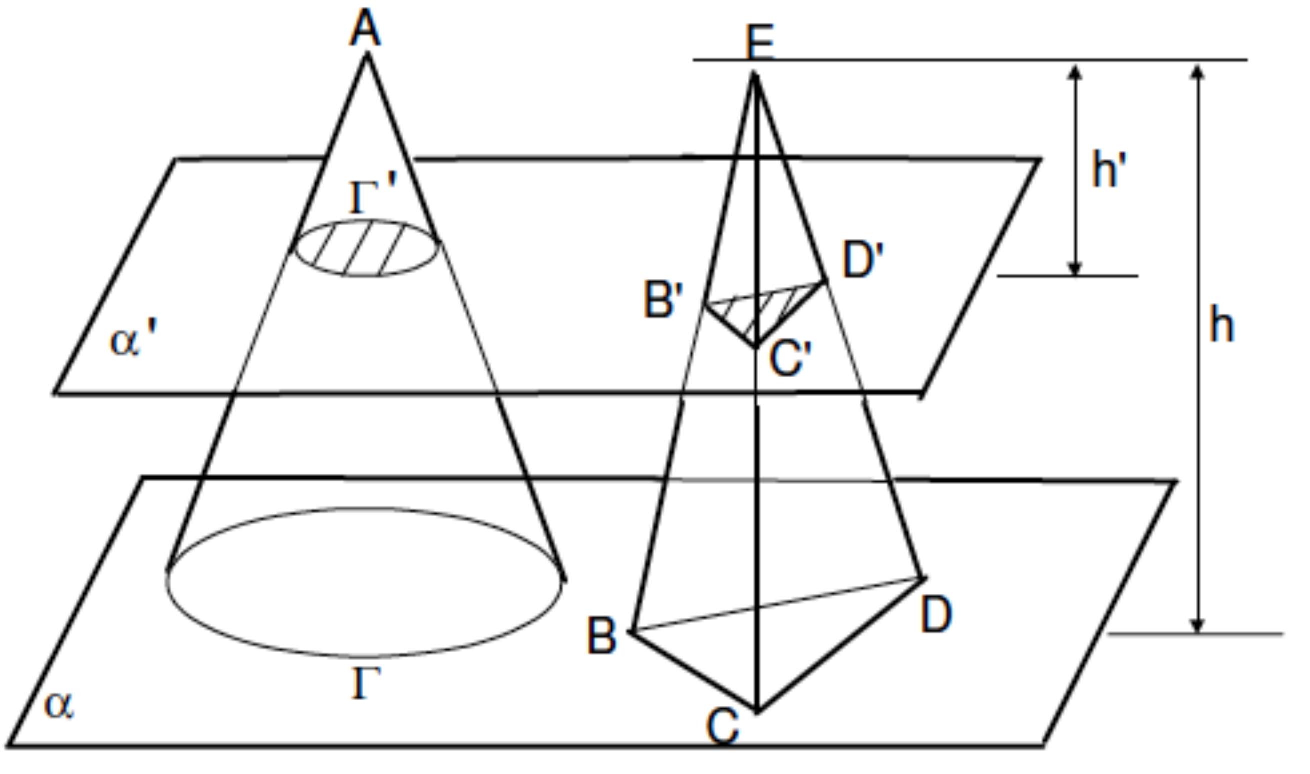
- Considere um cone C com vértice em A e cuja base é um círculo Γ de raio r e seja α' um plano paralelo ao plano da base e que é secante a C. Seja h a altura do cone e h' a distância de A ao plano α'. Então a interseção de C com α' é um círculo de raio $r'=(h'/h)\, r$.

- Logo,

$$\frac{\text{Área}(\Gamma')}{\text{Área}(\Gamma)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 .$$

Volume do cone

- Considere um cone de altura h, vértice em A e base dada por um círculo Γ. No plano de Γ, considere um triângulo BCD de área igual à área de Γ e sobre ele construa uma pirâmide P de altura h.



Volume do cone

- Para todo plano α' paralelo a α e secante ao cone, as áreas de

$\Gamma' = \alpha' \cap C$ e $B'C'D' = P \cap \alpha'$ satisfazem

$$\frac{\text{Área}(\Gamma')}{\text{Área}(\Gamma)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{\text{Área}(B'C'D')}{\text{Área}(BCD)}$$

- Como Área(Γ) = Área(BCD) por construção, segue que

$$\text{Área}(C \cap \alpha') = \text{Área}(P \cap \alpha')$$

para todo α' paralelo a α.

Volume do cone

- Pelo Princípio de Cavalieri,

$$Vol(C) = Vol(P) = \frac{1}{3}\text{Área}(BCD)h = \frac{1}{3}\text{Área}(\Gamma)h$$

- Provamos então que

$\boxed{\text{O volume de um cone é um terço do produto da área da base pela altura.}}$

Volume da esfera

- Se cortarmos uma esfera de raio r por um plano distando h do seu centro, obteremos um círculo de área igual a $\pi(r^2-h^2)$.

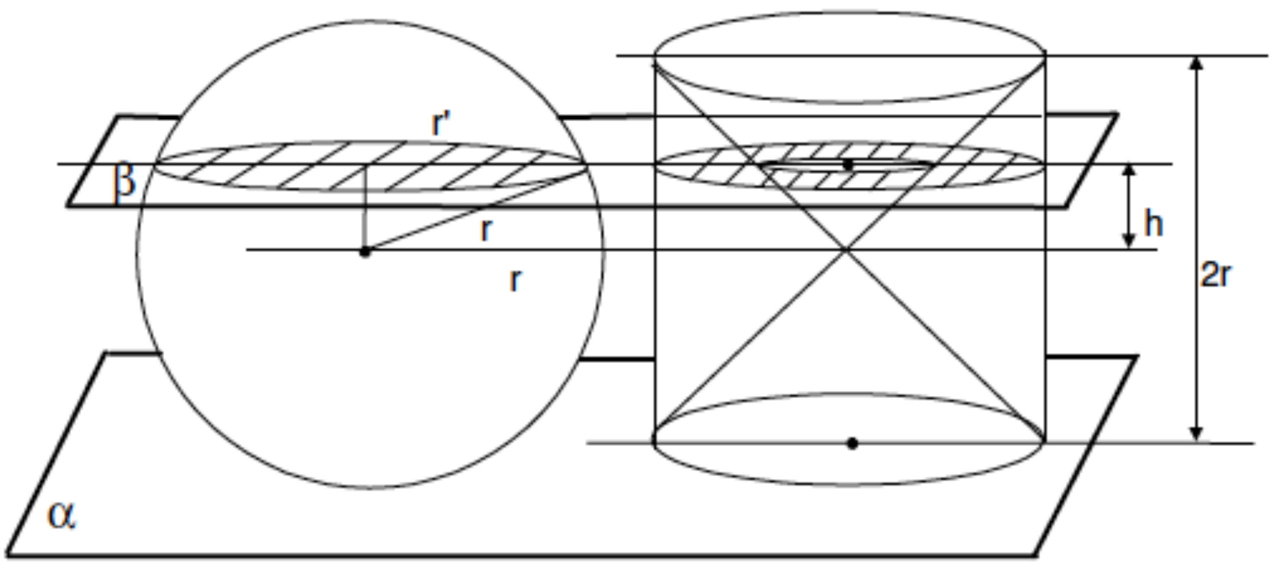
- Este valor corresponde à área de uma coroa circular limitada por círculos de raios r e h.

- Para calcular o volume de uma esfera através do Princípio de Cavalieri, devemos construir um sólido, cujo volume saibamos calcular, tal que suas seções planas sejam coroas circulares de área $\pi(r^2-h^2)$.

Volume da esfera

- Considere uma esfera de raio *r* que esteja sobre um plano α e construa um cilindro reto de altura *2r* e cuja base seja um círculo de raio *r* contido em α.

- Considere ainda dois cones ambos com vértice no centro do cilindro cujas bases sejam as bases do cilindro.



Volume da esfera

- A seção plana determinada na esfera, tem área igual a $\pi(r^2-h^2)$.

- A seção plana determinada no sólido construído com o cilindro e os dois cones é uma coroa circular cujo raio maior é *r* e cujo raio menor é *h*. Logo, sua área vale $\pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2-h^2)$.

- Pelo Princípio de Cavalieri, o volume da esfera é igual ao volume do outro sólido (cilindro – dois cones).

- Assim,

$$\begin{aligned} Vol(\text{esfera}) &= Vol(\text{cilindro}) - 2Vol(\text{cone}) \\ &= \pi r^2 \times 2r - 2\frac{1}{3}\pi r^2 \times r \\ &= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Volume da esfera

- Provamos assim que

$$\boxed{\text{O volume de uma esfera de raio } r \text{ é } V = \frac{4}{3}\pi r^3.}$$