

## EXERCÍCIOS DOS TEXTOS 11 E 12

1. Mostre que, para quaisquer conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , vale:

- (a)  $|A| = |A|$ .
- (b) Se  $|A| = |B|$ , então  $|B| = |A|$ .
- (c) Se  $|A| = |B|$  e  $|B| = |C|$ , então  $|A| = |C|$

2. Mostre que, para quaisquer conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , vale:

- (a)  $|A| \leq |A|$ .
- (b) Se  $|A| \leq |B|$  e  $|B| \leq |C|$ , então  $|A| \leq |C|$

3. Mostre que se  $|A| \leq |B|$ , então existe uma função  $f : B \rightarrow A$  sobrejetora, onde  $A$  e  $B$  são conjuntos quaisquer,  $A \neq \emptyset$ .

4. Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos quaisquer,  $A \neq \emptyset$  e suponha que existe uma função  $f : B \rightarrow A$  sobrejetora.

- (a) Mostre que  $\mathcal{P} = \{f^{-1}[\{a\}] : a \in A\}$  é uma partição de  $B$ .
- (b) Ache uma função  $f : A \rightarrow B$  injetora (mostrando que de fato é função e que é injetora).
- (c) Conclua (usando também o exercício anterior) que  $|A| \leq |B|$  se e somente se existe uma função  $f : B \rightarrow A$  sobrejetora

5. Mostre que, para quaisquer conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , vale:

- (a) Se  $A \subset B$ , então  $|A| \leq |B|$ .
- (b) Se  $|A| \leq |B|$  e  $|A| = |C|$ , então  $|C| \leq |B|$ .
- (c) Se  $|A| \leq |B|$  e  $|B| = |C|$ , então  $|A| \leq |C|$ .

6. Para  $n$  e  $m$  em  $\mathbb{N}$  quaisquer, mostre que:

- (a) Se  $n \neq m$ , então não existe  $f : n \rightarrow m$  bijetora.
- (b) Se  $|S| = n$  e  $|S| = m$ , então  $n = m$ .
- (c) Se  $B$  é finito e  $A \subsetneq B$ , não existe  $f : A \rightarrow B$  bijetora.
- (d)  $\mathbb{N}$  é infinito.