

*MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle*  
*Sistemas lineares de controle*  
*Princípio da dualidade<sup>1</sup>*

Depto. Matemática Aplicada  
Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de São Paulo  
São Paulo - SP

---

<sup>1</sup>K. Ogata [Seção 9.7].

Nesta aula discutiremos a relação entre controlabilidade e observabilidade conhecido como o **princípio de dualidade**, devido a Kalman, para esclarecer aparentes analogias entre tais conceitos.

- Trataremos sistemas de controle **autônomos** da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

com estado  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , **controle**  $u(t) \in \mathbb{R}^r$ , saída  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  ( $m \leq n$ ),  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrizes constantes.

Lembramos os seguintes resultados discutidos em **aulas** anteriores

## Teorema

Considere o seguinte sistema de **controle**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (*)$$

com estado  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , controle  $u(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ . Então (\*) é de estado **controlável**, se e somente se, o **posto** da matriz  $n \times nr$

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (1)$$

é  $n$ . Assim, o sistema de estado é de saída controlável se e só se é **completamente** controlável.

## Teorema

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (*)$$

com estado  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  e **saída**  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  ( $m \leq n$ ) onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  são matrizes constantes. Então (\*) é **observável**, se e só se, o **posto** da matriz  $mn \times n$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

é  $n$ . Assim, o sistema (\*) é observável se e só se é **completamente** observável.

Considere então os seguintes **sistemas** de controle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (S_1)$$

e

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A'z(t) + C'v(t) \\ n(t) = B'z(t) \end{cases} \quad (S_2)$$

onde  $x(t)$  e  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  são os vetores de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  e  $v(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  os vetores de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  e  $n(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  **denotam** as saídas do sistema com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrizes constantes.<sup>2</sup>

## Teorema (princípio de dualidade)

O sistema de controle  $S_1$  será de **estado** completamente controlável se e só se o sistema  $S_2$  for completamente observável.

<sup>2</sup>Recordamos que  $M'$  é a matriz transposta de  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

*Dem.* Inicialmente veremos a ida. Suponha então que o sistema  $S_1$  é **controlável**. Vamos mostrar que  $S_2$  é **observável**. Se  $S_1$  é controlável, então a matriz  $n \times nr$

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

é de **posto**  $n$ . Como o posto de uma matriz e sua transposta são iguais, concluímos que

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} B' \\ B'A' \\ \vdots \\ B'A'^{n-1} \end{bmatrix}$$

também é de posto  $n$ . Assim, **obtemos** de (2) que o sistema  $S_2$  é observável provando a **ida**.

Vejamos agora a **volta**. Suponha  $S_2$  observável. Vamos mostrar que  $S_1$  é controlável. Lembre-se que  $S_2$  é observável se e só se a matriz  $nr \times n$

$$\begin{bmatrix} B' \\ B'A' \\ \vdots \\ B'A'^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}'$$

é de **posto**  $n$ . Usando outra vez que a matriz e sua transposta possuem o mesmo posto, concluímos que a matriz  $n \times nr$

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

também possui posto  $n$ . Daí, obtemos que o sistema  $S_1$  é **controlável** por (1) finalizando a prova. □

## Observações

- ★ Note que o princípio da dualidade nos permite **verificar** a observabilidade/controlabilidade de um sistema **testando** a controlabilidade/observabilidade de seu '**dual**'.
- ★ Veja que mostramos uma relação entre controle de **estado** (e não de saída) e observabilidade de sistemas de controle autônomos.



**Exemplo.** Considere os seguintes sistemas de controle:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ x &= \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (E_1)$$

e

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (E_2)$$

- i) Note que a matriz de **estado** do sistema  $E_2$  é a transposta da matriz de estado do sistema  $E_1$ . E a transposta da matriz de controle do sistema  $E_1$  é a **matriz** de entrada do sistema  $E_2$ . **Logo**, pelo princípio da dualidade, temos que  $E_1$  é controlável se e só se  $E_2$  é observável.
- ii) **Analogamente** temos que  $E_2$  é controlável se e só se  $E_1$  é observável.

Verifiquemos então a controlabilidade e observabilidade de

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (E_1).$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Temos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Controlabilidade.** Veja que

$$\begin{aligned} [B \quad AB] &= \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que é uma matriz de **posto 2**. Logo, o sistema  $E_1$  é de estado controlável e pelo princípio da dualidade temos que  $E_2$  é **observável**.

**Observabilidade.** Já vimos num exemplo anterior que  $E_1$  **não** é observável. De fato, com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = ( 0.8 \quad 1 )$$

temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ ( 0.8 \quad 1 ) & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ -0.4 & -0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que é uma matriz **singular** e portanto não possui posto igual a 2. Dessa forma concluímos que  $E_1$  não é observável. Logo, pelo princípio da **dualidade** obtemos que  $E_2$  não é controlável.