

AULA 26

MECÂNICA QUÂNTICA II

Osulap de Rabi do Valuo e Colapso e Ressurgimento Quântico (Natureza Quântica de Luz)

Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (1963)

O Hamiltoniano de Jaynes-Cummings descreve de forma aproximada a interação de um átomo de 2 níveis com o campo magnético quantizado. Esse modelo que restringe a atenção para a interação do átomo com um único modo do campo eletromagnético quantizado simplifica a matemática e permite cálculos explícitos revelando

- a existência de oscilações de Rabi entre estados do sistema de 2 níveis ^{medida que interage com} o campo e.m. quantizado.

- uma quantização em escada dos níveis de energia, chamado de Jaynes-Cummings ladder, que escala em energia como $\sqrt{n}$, onde n é o número de ocupação no sistema acoplado. Essa quantização de energia e comportamento não linear é uma característica puramente quântica

- o colapso e subseqüente ressurgimento da probabilidade de detectar o sistema de 2 níveis em um dado estado quando o campo está inicialmente em um estado coerente.

"Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser"
G. Rempe, H. Walther e N. Klein, Phys Rev. Lett 58, 353 (1987)

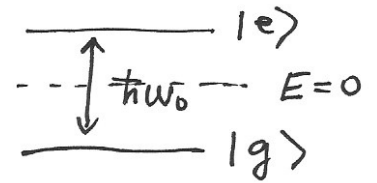
Experimentos recentes tem explorado a aplicação do modelo a sistemas com aplicações potenciais em informação quântica e controle de coerência.

Consideremos um átomo possuindo um nível fundamental (ou metaestável de vida média muito longa) $|g\rangle$ e um nível excitado $|e\rangle$.

Podemos associar à base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ os vetores

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$



com

$$E^e - E^g = \hbar\omega_0 \quad (2)$$

Vamos estudar a interação do átomo com um único modo do campo eletromagnético quantizado em uma cavidade

$$\vec{E}(y, t) = \hat{z} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{V}} (a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) \sin ky \quad (3)$$

de frequência $\omega \approx \omega_0$: vamos trabalhar nas vizinhanças de ressonância

$$\delta = \omega - \omega_0, \quad \delta \ll \omega_0 \quad (4)$$

Sejam os estados

$$|\varphi_n^g\rangle = |g \otimes (n+1)\rangle \quad (5a)$$

↑
estado onde o átomo está no nível fundamental e a cavidade contém $n+1$ fótons

$$E_n^g = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 + (n+1)\hbar\omega \quad (6a)$$

$$|\varphi_n^e\rangle = |e \otimes n\rangle \quad (5b)$$

↑
estado onde o átomo está no nível excitado e a cavidade contém n fótons

$$E_n^e = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 + n\hbar\omega$$

$$= -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 + (n+1)\hbar\omega - \hbar\delta \quad (6b)$$

↑
quase-degenerados

(2)

O acoplamento do campo com o átomo é feito através do momento de dipolo elétrico $\vec{D}$, nesse caso o Hamiltoniano de interação é

$$H_I = -\vec{D} \cdot \vec{E}(t=0) = -(\vec{D} \cdot \hat{z}) \sqrt{\frac{\hbar \omega}{V}} (a + a^\dagger) \sin ky$$

$$= -(\vec{D} \cdot \hat{z}) g(y) (a + a^\dagger) \quad (7)$$

onde $g(y) = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{V}} \sin ky \quad (8)$

como $\langle g | \vec{D} | g \rangle = \langle e | \vec{D} | e \rangle = 0$ os elementos não diagonais

$$\langle g | \vec{D} \cdot \hat{z} | e \rangle = \langle e | \vec{D} \cdot \hat{z} | g \rangle^* = d^{(9)}$$

podem não ser nulos.

Sem perda de generalidade tomaremos $d \in \mathbb{R}$, o que permite escrever

$$\vec{D} \cdot \hat{z} = d (|e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|) \quad (10)$$

Podemos agora introduzir as matrizes de Pauli σ_+ e σ_-

$$\sigma_+ = |g\rangle \langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11a)$$

$$\sigma_- = \sigma_+^\dagger = |e\rangle \langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11b)$$

e

$$\sigma_3 = |g\rangle \langle g| - |e\rangle \langle e| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11c)$$

O que permite re-escrever o Hamiltoniano de interação (7)

(3)

como

$$H_I = \frac{1}{2} \hbar \lambda(y) (\sigma_+ + \sigma_-) (a + a^\dagger) \quad (12)$$

$$\lambda(y) = \frac{2dg(y)}{\hbar} \quad (13)$$

O Hamiltoniano total do sistema é

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_I = H_{at} + H_r + H_I \\ &= -\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_3 + \hbar \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \lambda(y) (\sigma_+ + \sigma_-) (a + a^\dagger) \quad (14) \end{aligned}$$

Na descrição de interação um operador $A \rightarrow \tilde{A}(t)$

$$\tilde{A}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} A e^{-iH_0 t/\hbar} = e^{i(H_{at} + H_r)t/\hbar} A e^{-i(H_{at} + H_r)t/\hbar}$$

$$\tilde{\sigma}_\pm(t) = e^{iH_{at}t/\hbar} \sigma_\pm e^{-iH_{at}t/\hbar} = \sigma_\pm e^{\mp i\omega_0 t} \quad (15)$$

$$\tilde{a}(t) = a e^{-i\omega t} \quad (16a) \quad \tilde{a}^\dagger(t) = a^\dagger e^{i\omega t} \quad (16b)$$

assim

$$\tilde{\sigma}_- \tilde{a} \propto e^{i(\omega_0 - \omega)t} = e^{-i\delta t}$$

$$\tilde{\sigma}_+ \tilde{a}^\dagger \propto e^{-i(\omega_0 - \omega)t} = e^{i\delta t}$$

$$\tilde{\sigma}_+ \tilde{a} \propto e^{i(\omega_0 + \omega)t}$$

$$\tilde{\sigma}_- \tilde{a}^\dagger \propto e^{-i(\omega_0 + \omega)t}$$

oscilam rapidamente
não renovem energia
p/ $\delta \ll \omega_0$ ignoramos
esses termos (aproximação secular)

(rotating
wave
approximation)

(4)

$$H_{JC} = -\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_3 + \hbar \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \lambda (y) (\sigma_- a + \sigma_+ a^\dagger) \quad (17)$$

↑
Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

esse Hamiltoniano acopla unicamente os níveis $|\psi_n^g\rangle$ e $|\psi_n^e\rangle$

Na prática, enviamos o átomo dentro da cavidade seguindo uma certa trajetória e vamos supor que $\sin ky = 1$ ao longo dessa trajetória.

Definimos a frequência de Rabi do vácuo

$$\Omega_R \equiv \frac{2d}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{V}} \quad (18)$$

Os elementos de matriz não diagonais de H_I

$$\langle g \otimes (n+1) | \sigma_+ a^\dagger | e \otimes n \rangle = \sqrt{n+1}$$

$$\langle \psi_n^e | \sigma_- a | \psi_n^g \rangle = \langle e \otimes n | \sigma_- a | g \otimes (n+1) \rangle = \sqrt{n+1}$$

podemos escrever H_{JC} na forma matricial

$$H_{JC} = -\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \hbar \omega \begin{pmatrix} n+1 & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \hbar \Omega_R \sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} \delta & -\Omega_R \sqrt{n+1} \\ \Omega_R \sqrt{n+1} & -\delta \end{pmatrix} \quad (19)$$

$|g \otimes (n+1)\rangle$

$|e \otimes n\rangle$

$$E_n^- = -\frac{1}{2} \hbar \sqrt{S^2 + (n+1) \Omega_R^2} \quad (20a)$$

$$|X_n^-\rangle = -\sin \theta_n |\varphi_n^g\rangle + \cos \theta_n |\varphi_n^e\rangle \quad (20b)$$

$|n, -\rangle$

$$E_n^+ = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{S^2 + (n+1) \Omega_R^2} \quad (20c)$$

$$|X_n^+\rangle = \cos \theta_n |\varphi_n^g\rangle + \sin \theta_n |\varphi_n^e\rangle \quad (20d)$$

$|n, +\rangle$

$$\tan 2\theta_n = \frac{\Omega_R \sqrt{n+1}}{S} \quad (20e)$$

$|X_n^-\rangle$ e $|X_n^+\rangle$ são os autovetores do átomo "vestido" pelo campo magnético.

Suponha que o átomo entre na cavidade no estado excitado $|e\rangle$ no instante $t=0$ e que a cavidade esteja com $n=0$ (vácuo), suponha também que $S=0$ (ressonância). O estado $|\varphi_0^e\rangle$ se decompõe na base

$$|\varphi_0^e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|X_0^+\rangle + |X_0^-\rangle), \quad E_0^\pm = \pm \frac{1}{2} \hbar \Omega_R$$

$\parallel$
 $|e\rangle \otimes |0\rangle$

$$|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\Omega_R t/2} |X_0^+\rangle + e^{i\Omega_R t/2} |X_0^-\rangle \right)$$

a probabilidade de encontrar o átomo depois de um tempo t no seu estado excitado é

$$|\langle \varphi_0^e | \varphi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left| e^{-i\Omega_R t/2} + e^{i\Omega_R t/2} \right|^2 = \cos^2 \frac{\Omega_R t}{2}$$

(6)

essa probabilidade oscila em função do tempo com a frequência de Rabi do vácuo Ω_R . Essas oscilações são provenientes da interação do átomo e o campo eletromagnético quantizado, como a cavidade está inicialmente vazia as oscilações são chamadas de oscilações de Rabi do vácuo

Rabi do vácuo

Essas oscilações foram observadas experimentalmente por Brune et al. (1996) o que fornece uma prova direta da quantização do campo e.m.

Escada de Jaynes-Cummings

H_{JC} pode apenas causar transições do tipo $|e\rangle|n\rangle \leftrightarrow |g\rangle|n+1\rangle$, esses estados são chamados de estados nus do modelo de Jaynes-Cummings. Como vimos para n fixo a dinâmica do sistema é confinada ao espaço 2D $\{|e\rangle|n\rangle, |g\rangle|n+1\rangle\}$

Na ressonância

$$E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \hbar \Omega_R \sqrt{n+1}$$

$2\hbar\omega$

$|2\rangle$

$\hbar\omega$ $|1\rangle$

$\frac{1}{2}\hbar\omega$ $|e\rangle$

0 $|0\rangle$

$-\frac{1}{2}\hbar\omega$ $|g\rangle$

átomo

fótons

Desacoplado

$$\pm \frac{\hbar \Omega_R}{2} \sqrt{n}$$

$$\pm \frac{\hbar \Omega_R}{2} \sqrt{3}$$

$$\pm \frac{\hbar \Omega_R}{2} \sqrt{2}$$

$$\pm \frac{\hbar \Omega_R}{2} \text{ Acoplados}$$

Estados Vestidos

(7)

Se o estado inicial do átomo é $|e, n\rangle = |e\rangle |n\rangle$ ou $|g, n+1\rangle = |g\rangle |n+1\rangle$ ao entrar na cavidade contendo um número conhecido de fótons o estado do sistema átomo + cavidade se encontra em uma superposição dos novos estados de átomo-cavidade

$$\begin{aligned} |n, +\rangle &= \cos \theta_n |g, n+1\rangle + \sin \theta_n |e, n\rangle \\ |n, -\rangle &= -\sin \theta_n |g, n+1\rangle + \cos \theta_n |e, n\rangle \end{aligned}$$

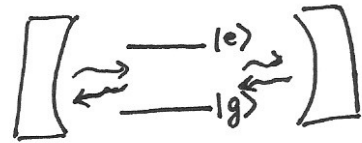
"Estados vestidos do átomo vestido"

$$\Delta E = E_n^+ - E_n^- = \hbar \sqrt{\delta^2 + (n+1)\Omega_R^2}$$

diferença de energia entre os estados vestidos

que no caso de ressonância perfeita, $\delta = 0$, $\Delta E = \hbar \Omega_R \sqrt{n+1}$

$$|n, \pm\rangle = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} |g, n+1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |e, n\rangle$$



$\Rightarrow$ a interação ~~com~~ do átomo com o campo quebra a degenerescência dos estados (6a) e (6b) de $\hbar \Omega_R \sqrt{n+1}$ essa não linearidade da hierarquia de níveis de energia escalonando com $\sqrt{n+1}$ é conhecida como escada de Jaynes-Cummings.

Colapso e Ressurgimento das Probabilidades

Considere um átomo no estado fundamental interagindo com um modo do campo preparado em um estado coerente.

$$|\psi(0)\rangle \equiv |g, z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|z|^2/2} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |g, n\rangle$$

por simplicidade vamos considerar a ressonância, $\delta=0$.

$$\hat{H}_n = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R \sqrt{n+1} \hat{\sigma}_x^{(n)}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i \frac{\hbar}{2} \Omega_R \frac{\sqrt{n+1}}{\hbar} \hat{\sigma}_x t} |\psi(0)\rangle$$

$$= \left(\cos\left(\frac{\Omega_R \sqrt{n+1}}{2} t\right) - i \sin\left(\frac{\Omega_R \sqrt{n+1}}{2} t\right) \hat{\sigma}_x \right) |g, z\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|z|^2/2} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \left[\left(\cos\left(\frac{\Omega_R \sqrt{n+1}}{2} t\right) |g, z\rangle - i \sin\left(\frac{\Omega_R \sqrt{n+1}}{2} t\right) \right. \right.$$

$$\left. |e, n-1\rangle \right]$$

$$P_{g,1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-|z|^2} z^{2n}}{n!} \cos^2\left(\frac{\Omega_R \sqrt{n+1}}{2} t\right)$$

probabilidade de encontrar o átomo no estado fundamental em função do tempo.

$|z|^2 = \bar{n}$ = # médio de fótons na cavidade

$$P_g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^n}{n!} \cos^2\left(\sqrt{n+1} \frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

a probabilidade de estar ~~no~~ estado fundamental oscila com frequência $\sim \sqrt{n+1} \frac{\Omega_R}{2}$ para cada valor de n , mas colapsa depois de um certo tempo característico

Esse colapso pode ser entendido como consequência de interferência destrutiva entre as frequências diferentes que ficam fora de fase. Como as frequências tem um espectro discreto isso leva a outro resultado interessante para tempos longos deve haver um ressurgimento da probabilidade devido as frequências voltarem a estar em fase.

Se o campo ^{e.m} fosse clássico as frequências teriam um espectro contínuo e esse ressurgimento não aconteceria em um tempo finito!