Interpolação

Interpolação Polinomial - Forma de Newton

Nelson Kuhl

IME/USP

17 de novembro de 2020

Introdução

A forma de Newton nada mais é do que a representação do polinômio interpolador em uma base específica. Considere a tabela

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \tag{1}$$

onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Então os $n+1$ polinômios

$$\begin{aligned} &1,\ x - x_0,\ (x - x_0)\cdot(x - x_1), \dots,\ (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}), \\ &\dots,\ (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})\cdots(x - x_{n-1}), \end{aligned} \tag{2}$$

formam uma base para $\mathcal{P}_n$. Logo, existem únicos coeficientes $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ tais que o polinômio interpolador p_n da tabela pode ser representado como

$$\begin{aligned} p_n(x) = c_0 &+ c_1\cdot(x - x_0) + c_2\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1) + \dots \\ &+ c_k\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) + \dots \\ &+ c_n\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

A forma de Newton

A representação (3) para o polinômio interpolador é chamada de forma de Newton. Por exemplo, para atabela

x	-1	0	1	2
2^x	0.5	1	2	4

,

existem únicos coeficientes $\{c_j\}_{j=0}^{3}$ tais que o polinômio interpolador dela é igual a

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x + c_3(x+1)x(x-1).$$

Note que o ponto x_n não aparece na base mas a informação $p_n(x_n) = y_n$ deve ser usada para a obtenção dos coeficientes.

Cálculo dos coeficientes

Os coeficientes da forma de Newton são obtidos impondo-se as restrições $p_n(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, na representação (3), o que nos dá o seguinte sistema linear triangular inferior:

$$
\begin{aligned}
& c_0 = y_0 \\
& c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1 \\
& c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\
& \vdots \\
& c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots \\
& \; + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) = y_n
\end{aligned}
$$

Como os pontos x_i são distintos, a diagonal da matriz é diferente de zero e o sistema pode ser facilmente resolvido.

Cálculo dos coeficientes

Para o exemplo, temos

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0.5\\
c_0 + c_1 \cdot 1 &= 1\\
c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2 \cdot 1 &= 2\\
c_0 + c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3 \cdot 2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &= 4,
\end{aligned}$$

cuja solução é $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$ e $c_3 = \frac{1}{12}$. O polinômio interpolador fica

$$p_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)x + \frac{1}{12}(x+1)x(x-1).$$

Há uma outra forma de se obter os coeficentes com, implicações mais abrangentes. Ela depende do seguinte resultado, interessante por si só.

Um resultado teórico

Teorema 1

Dada a tabela (1), defina $p_{0\ldots n-1}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n-1$ e $p_{1\ldots n}$ como sendo o polinômio interpolador da subtabela (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$. Então, para todo x, o polinômio interpolador p_n da tabela (1) satisfaz

$$p_n(x) = \frac{(x - x_0)p_{1\ldots n}(x) - (x - x_n)p_{0\ldots n-1}(x)}{x_n - x_0}. \tag{4}$$

Um resultado teórico

Demontração

Denote por $q(x)$ o lado direito de (4). Claramente, q **é um polinômio de grau menor ou igual a** n. Para $x = x_i$, $1 \leq i \leq n-1$, os polinômios interpoladores das subtabelas coincidem com y_i e portanto

$$q(x_i) = \frac{(x_i - x_0)y_i - (x_i - x_n)y_i}{x_n - x_0} = y_i, \ 1 \leq i \leq n.$$

Além disso,

$$q(x_0) = \frac{-(x_0 - x_n)p_{0\ldots n-1}(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{-(x_0 - x_n)y_0}{x_n - x_0} = y_0,$$

$$q(x_n) = \frac{(x_n - x_0)p_{1\ldots n}(x_n)}{x_n - x_0} = \frac{(x_n - x_0)y_n}{x_n - x_0} = y_n.$$

Da unicidade do polinômio interpolador segue que $q = p_n$.

$\square$