Exercícios 7.6

1. Seja $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$.

   a) f é contínua em 2? Por quê?
   b) f é derivável em 2? Por quê?

2. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

   a) f é derivável em 0? Justifique.
   b) f é contínua em 0? Justifique.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{se } x < 3 \\ x-3 & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$.

   a) f é derivável em 3? Justifique.
   b) f é contínua em 3? Justifique.

Exercícios 7.8

1. Determine f', f'' e f'''.

$a)\ f(x) = 4x^4 + 2x$

$b)\ f(x) = \dfrac{1}{x}$

$c)\ f(x) = 5x^2 - \dfrac{1}{x^3}$

$d)\ f(x) = 3x^3 - 6x + 1$

$e)\ f(x) = x\,|x|$

$f)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se } x \leqslant 1 \\ 5x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

2. Esboce os gráficos de f, f' e f''.

$a)\ f(x) = x^2\,|x|$

$b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se } x \leqslant 1 \\ 5x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

3. Determine a derivada de ordem n.

$a)\ f(x) = e^x$

$b)\ f(x) = \operatorname{sen} x$

$c)\ f(x) = \cos x$

$d)\ f(x) = \ln x$

1. Calcule a derivada.

a) $y = 5x^3 + 6x - 1$

b) $s = \sqrt[5]{t} + \dfrac{3}{t}$

c) $x = \dfrac{t}{t+1}$

d) $y = t \cos t$

e) $y = \dfrac{u+1}{\ln u}$

f) $x = t^3 e^t$

g) $s = e^t \operatorname{tg} t$

h) $y = \dfrac{x^3+1}{\operatorname{sen} x}$

i) $y = \sqrt[3]{u}\ \sec u$

j) $x = \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2}$

l) $x = e^t \cos t$

m) $u = 5v^2 + \dfrac{3}{v^4}$

n) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

o) $E = \dfrac{1}{2} v^2$

p) $E = \dfrac{1}{2} mv^2$, m constante

q) $U = \dfrac{a}{x^{12}} - \dfrac{b}{x^6}$, a e b constantes

2. Seja $y = \dfrac{x^3}{x + \sqrt{x}}$. Calcule.

a) $\dfrac{dy}{dx}$

b) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

3. Seja $y = t^2 x$, onde $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1}$ supondo $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=1} = 2$ e $x = 3$ para $t = 1$ (isto é, $x(1) = 3$).

4. Considere a função $y = xt^3$, onde $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=2}$ sabendo que $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 3$ e que $x(2) = 1$ (isto é, $x = 1$ para $t = 2$).

8. Calcule a derivada segunda.

a) $y = x^3 + 2x - 3$

b) $x = t \operatorname{sen} t$

c) $y = x^{10} + \dfrac{1}{x^3}$

d) $y = t \ln t$

e) $x = e^t \cos t$

f) $y = \dfrac{e^x}{x}$

9. Seja $y = x^2 - 3x$. Verifique que $x \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 3$.

10. Seja $y = \dfrac{1}{x}$. Verifique que $x^2 \dfrac{d^3y}{dx^3} = 6 \dfrac{dy}{dx}$.

13. Seja $y = te^t$. Verifique que $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + y = 0$.

14. Suponha que $y = y(r)$ seja derivável até a 2.ª ordem. Verifique que

$$\frac{d}{dr}\left[(r^2 + r)\frac{dy}{dr}\right] = (2r + 1)\frac{dy}{dr} + (r^2 + r)\frac{d^2y}{dr^2}.$$

15. Seja $y = x^2$, onde $x = x(t)$ é uma função derivável até a 2.ª ordem. Verifique que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2x\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Exercícios 7.11

1. Determine a derivada.

$a)$ $y = \text{sen } 4x$

$b)$ $y = \cos 5x$

$c)$ $f(x) = e^{3x}$

$d)$ $f(x) = \cos 8x$

$e)$ $y = \text{sen } t^3$

$f)$ $g(t) = \ln(2t + 1)$

$g)$ $x = e^{\text{sen } t}$

$h)$ $f(x) = \cos e^x$

$i)$ $y = (\text{sen } x + \cos x)^3$

$j)$ $y = \sqrt{3x + 1}$

$l)$ $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

$m)$ $y = e^{-5x}$

$n)$ $x = \ln(t^2 + 3t + 9)$

$o)$ $f(x) = e^{\text{tg } x}$

$p)$ $y = \text{sen}(\cos x)$

$q)$ $g(t) = (t^2 + 3)^4$

$r)$ $f(x) = \cos(x^2 + 3)$

$s)$ $y = \sqrt{x + e^x}$

$t)$ $y = \text{tg } 3x$

$u)$ $y = \sec 3x$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e seja $g(t) = f(t^2 + 1)$. Supondo $f'(2) = 5$, calcule $g'(1)$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e seja g dada por $g(x) = f(e^{2x})$. Supondo $f'(1) = 2$, calcule $g'(0)$.

5. Calcule a derivada segunda.

a) $y = \operatorname{sen} 5t$

b) $y = \cos 4t$

c) $x = \operatorname{sen} \omega t$, ω constante

d) $y = e^{-3x}$

e) $y = e^{-x^2}$

f) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

g) $y = \ln(x^2 + 1)$

h) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

i) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

j) $y = e^{-x} \cos 2x$

l) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

m) $y = \dfrac{3x+1}{x^2 + x}$

n) $y = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{e^x}$

o) $y = xe^{-2x}$

p) $y = \operatorname{sen}(\cos x)$

q) $f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2 - 1}$

6. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja f dada por $f(x) = x\, g(x^2)$. Verifique que

$$f'(x) = g(x^2) + 2x^2 g'(x^2).$$

7. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja f dada por $f(x) = x\, g(x^2)$. Calcule $f'(1)$ supondo $g(1) = 4$ e $g'(1) = 2$.

11. Seja $y = xe^{2x}$. Verifique que $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

12. Determine α de modo que $y = e^{\alpha x}$ verifique a equação $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$.

13. Determine α de modo que $y = e^{\alpha x}$ verifique a equação $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

15. Seja g uma função derivável. Verifique que

a) $[\text{tg}\, g(x)]' = \sec^2 g(x) \cdot g'(x)$

b) $[\sec g(x)]' = \sec g(x)\, \text{tg}\, g(x) \cdot g'(x)$

c) $[\text{cotg}\, g(x)]' = -\text{cosec}^2\, g(x) \cdot g'(x)$

d) $[\text{cosec}\, g(x)]' = -\text{cosec}\, g(x)\, \text{cotg}\, g(x) \cdot g'(x)$

16. Derive.

a) $y = \text{tg}\, 3x$

b) $y = \sec 4x$

c) $y = \text{cotg}\, x^2$

d) $y = \sec(\text{tg}\, x)$

e) $y = \sec x^3$

f) $y = e^{\text{tg}}\, x^2$

g) $y = \text{cosec}\, 2x$

h) $y = x^3\, \text{tg}\, 4x$

i) $y = \ln(\sec 3x + \text{tg}\, 3x)$

j) $y = e{-}x \sec x^2$

22. Seja $y = y\,(x)$ definida no intervalo aberto I e tal que, para todo x em I,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2.$$

Verifique que, para todo x em I,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 2x^2y + 2y^3.$$

23. Seja $y = f\,(x)$ uma função derivável num intervalo aberto I, com $1 \in I$. Suponha $f(1) = 1$ e que, para todo x em I, $f'(x) = x + [f\,(x)]^3$.

a) Mostre que $f''(x)$ existe para todo x em I.
b) Calcule $f''(1)$.
c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

28. A função diferenciável $y = f(x)$ é tal que, para todo $x \in D_f$, o ponto $(x, f(x))$ é solução da equação $xy^3 + 2xy^2 + x = 4$. Sabe-se que $f(1) = 1$. Calcule $f'(1)$.

29. Seja $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ uma função derivável. Prove

a) Se f for uma função ímpar, então f' será par.
b) Se f for função par, então f' será ímpar.

30. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(2) = 2$ e $g'(2) = 2$. Calcule $H'(2)$, sendo H dada por $H(x) = g(g(g(x)))$.