

## Capítulo 28 do Tipler (6ª edição) Indução Magnética

Por volta de 1830, Michael Faraday, na Inglaterra, e Joseph Henry nos Estados Unidos, descobriram, independentemente, a indução magnética, mas é a Faraday que se atribuí a honra da descoberta por ter publicado primeiro as suas conclusões.

O fenômeno consiste na variação de um fluxo magnético no interior de um anel fechado que induz uma corrente.

As fems e correntes causadas por tais fluxos magnéticos variáveis são chamadas de **fems induzidas** e **correntes induzidas**.

O processo em si é chamado de indução.

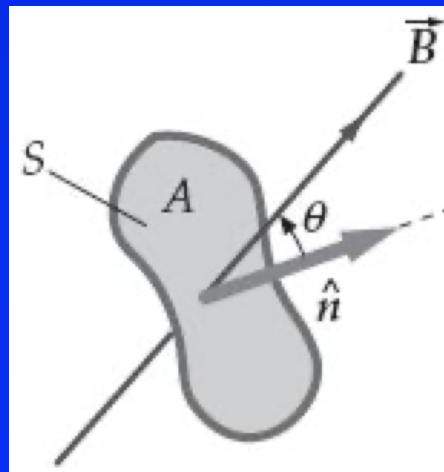
## 28-1 Fluxo Magnético

Já vimos o cálculo de fluxo magnético, quando falamos sobre a lei de Gauss para o magnetismo.

Aqui, o cálculo é o mesmo, mas é para uma superfície delimitada por uma curva fechada, como mostra a figura.

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_S B_n dA$$

O sentido do versor  $\hat{n}$ , normal ao elemento de superfície de área  $dA$ , é opcional, havendo duas possibilidades para ele, entretanto, o sinal do fluxo depende da escolha do sentido de  $\hat{n}$ . Entenderemos melhor isso, mais adiante nesta aula.



A unidade de fluxo magnético é tesla-metro quadrado, que é chamado de weber (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

Se a superfície é plana e tem uma área  $A$ , se  $\vec{B}$  é uniforme e (tem o mesmo módulo e direção) em toda a superfície, o fluxo magnético através da superfície é

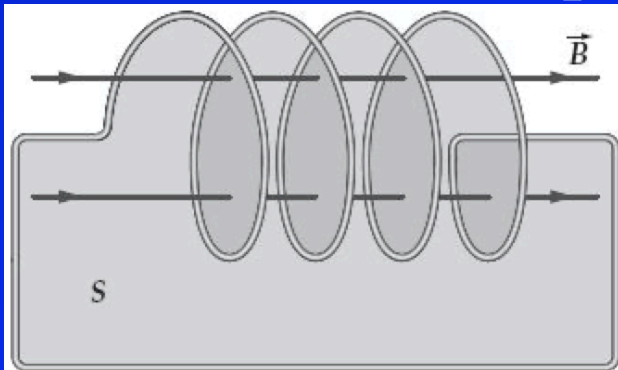
$$\phi_m = \vec{B} \cdot \hat{n}A = BA \cos \theta = B_n A$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{B}$  e  $\hat{n}$ .

Consideraremos o sentido de  $\hat{n}$  tal que  $\theta \leq 90^\circ$ .

Frequentemente estamos interessados no fluxo através de uma superfície limitada por uma bobina com várias voltas de fio (figura).

Se a bobina tem  $N$  voltas, o fluxo através da superfície é  $N$  multiplicado pelo fluxo através de cada volta



$$\phi_m = NBA \cos \theta$$

onde  $A$  é a área da superfície plana limitada por cada volta.

## Exemplo 28-1 Fluxo através de um solenoide

Determine o fluxo magnético através de um solenoide que tem comprimento  $\ell = 40$  cm, raio  $r = 2,5$  cm, número de voltas  $N = 600$  e conduz uma corrente  $I = 7,5$  A.

Este solenoide pode ser considerado longo, desde que  $\ell > 10r$ , assim, o campo magnético no interior dele é uniforme e paralelo ao eixo do solenoide (estamos desprezando efeitos de borda), dado por

$$B_z = \mu_0 n I$$

Dessa forma o campo magnético é perpendicular ao plano de cada volta do fio e o fluxo é dado por

$$\phi_m = N \mu_0 n I A = N \mu_0 \frac{N}{\ell} I A = \frac{\mu_0 N^2 I A}{\ell} \quad \text{sendo } A = \pi r^2, \text{ portanto}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(600)^2 (7,5 \text{ A}) \pi (0,025 \text{ m})^2}{0,40 \text{ m}}$$

$$= \boxed{1,66 \times 10^{-2} \text{ Wb}}$$

## 28-2 Fem induzida e a lei de Faraday

Experimentos de Faraday e outros pesquisadores mostraram que, se o fluxo magnético variar através de uma superfície limitada por um fio (um caminho condutor), uma fem igual a  $(-)$  taxa de variação do fluxo será induzida no fio

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi_m}{dt}$$

Este resultado é conhecido como a lei de Faraday.

O sinal negativo na lei de Faraday está relacionado ao sentido da fem induzida (horário ou anti-horário), o qual será discutido ainda nesta aula.

Geralmente detectamos a fem observando uma corrente no condutor, mas a fem nos limites da superfície (no contorno da superfície) existe mesmo se não existir o caminho condutor ou se ele for incompleto (não fechado) e, portanto, não existir corrente.

Como vimos, o fluxo magnético  $\phi_m$  através de uma superfície plana de área  $A$  em um campo magnético uniforme é dado por

$$\phi_m = BA \cos \theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{B}$  e a normal à superfície  $\hat{n}$ .

O fluxo pode ser variado aumentando ou diminuindo o módulo de  $\vec{B}$ , aumentando ou diminuindo  $A$  ou variando o ângulo  $\theta$ .

Se o campo magnético é devido a um ímã permanente, o módulo do campo magnético pode ser mudado aproximando ou afastando o ímã da superfície.

Se o campo magnético é devido a uma corrente em um circuito, o módulo do campo magnético pode ser mudado variando a corrente.

O fluxo através da superfície também pode variar através de alterações no ângulo  $\theta$ .

Para variar  $\theta$ , podemos variar a orientação da superfície ou a direção do campo magnético.

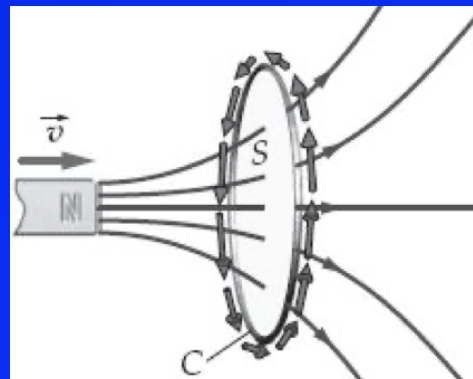
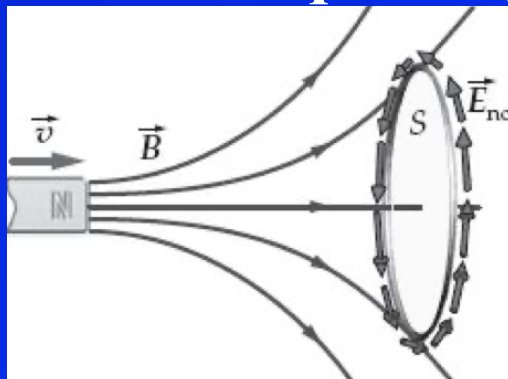
A figura mostra um anel condutor em repouso em um campo magnético. O fluxo através do anel está variando porque a intensidade do campo magnético na superfície  $S$  está aumentando e, portanto, uma fem é induzida no anel.

Como a fem é o trabalho realizado por unidade de carga (Cap 25), sabemos que deve haver forças exercidas nas cargas que as colocam em movimento e, portanto, estão realizando trabalho nestas cargas.

Forças magnéticas não podem realizar trabalho, portanto, não podemos atribuir a fem ao trabalho realizado por forças magnéticas.

São forças elétricas associadas ao campo elétrico não-conservativo  $\vec{E}_{nc}$  que realizam trabalho nas cargas em movimento.

A integral de linha do campo elétrico ao longo de um circuito completo é igual ao trabalho realizado por unidade de carga, o qual é igual à fem induzida no circuito.



$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Os campos elétricos que estudamos em capítulos anteriores eram produzidos por cargas elétricas estáticas.

Esses campos elétricos são conservativos, o que significa que a integral de linha  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  ao longo de qualquer caminho fechado  $C$  é zero.

Entretanto, o campo elétrico gerado pelo campo magnético variável é não-conservativo e, a integral de linha correspondente, ao longo de  $C$  é igual à fem  $\varepsilon$  induzida no anel condutor.

Retomando a lei de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad \text{e, como} \quad \varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\text{então } \varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

que é a fem induzida para um circuito em repouso em um campo magnético variável.

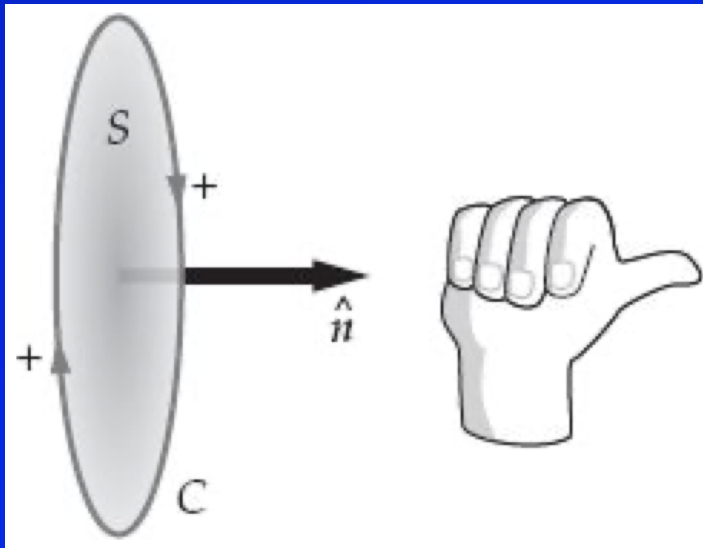


Retomando as equações do slide anterior

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad \text{e} \quad \varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Uma convenção de sinais foi necessária para que a lei de Faraday (equação a esquerda) fornecesse a polaridade correta da fem induzida (equação a direita).

De acordo com esta convenção, o sentido de integração em  $d\vec{\ell}$ , ao longo do caminho  $C$ , deve ser dado pela regra da mão direita, utilizando o versor  $\hat{n}$  do elemento de área  $dA$  na integração sobre a superfície  $S$  (delimitada por  $C$ ), da seguinte forma:



Colocando seu dedo polegar direito no sentido de  $\hat{n}$  (escolhido), os dedos de sua mão curvam no sentido de  $d\vec{\ell}$ , gerando uma fem sempre de sinal oposto à taxa de variação do fluxo magnético  $d\phi_m/dt$  o que justifica o sinal de menos na lei de Faraday.

## Exemplo 28-2 Fem induzida em uma bobina circular

Um campo magnético uniforme faz um ângulo de  $30,0^\circ$  com o eixo de uma bobina circular que tem 300 voltas e raio igual a 4,00 cm.

A intensidade do campo magnético aumenta a uma taxa de 85,0 T/s, enquanto sua direção e sentido permanecem fixos.

Determine a magnitude da fem induzida na bobina.

O fluxo magnético para cada volta é  $\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = BA \cos \theta$

e, considerando as  $N$  voltas,  $\phi_m = NBA \cos \theta$ ,

assim,  $\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = NA \cos \theta \frac{dB}{dt} = N\pi r^2 \cos \theta \frac{dB}{dt}$

então

$$\mathcal{E} = (300)\pi(0,0400 \text{ m})^2 \cos 30,0^\circ(85,0 \text{ T/s}) = -111 \text{ V}$$

$$\mathcal{E} = \boxed{111 \text{ V}}$$

### Exemplo 28-3 Fem induzida em uma bobina circular

Uma bobina com 80,0 voltas, raio igual a 5,00 cm e uma resistência igual a  $30,0 \Omega$  está em uma região que tem um campo magnético uniforme normal ao plano da bobina. A que taxa deve variar a intensidade do campo magnético para produzir uma corrente de 4,00 A na bobina?

Da mesma forma que no exemplo anterior,  $\phi_m = NBA \cos \theta$ , mas neste caso,  $\theta = 0$ , portanto,

$$\phi_m = NBA = NB\pi r^2$$
$$B = \frac{\phi_m}{N\pi r^2}$$

e

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{N\pi r^2} \frac{d\phi_m}{dt}$$
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

onde  $|\mathcal{E}| = RI = 120 \text{ V}$ , portanto

$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{1}{N\pi r^2} |\mathcal{E}| = \boxed{191 \text{ T/s}}$$

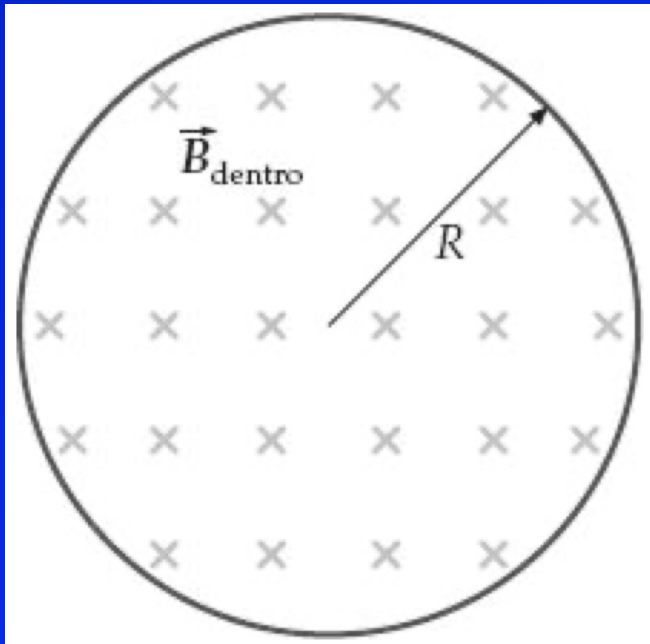
## Exemplo 28-4 Campo elétrico não-conservativo induzido

Um campo magnético é perpendicular ao plano da tela.

$\vec{B}$  é uniforme através de uma região circular que tem raio  $R$ , como mostra a figura. Fora desta região,  $B$  é igual a zero.

A direção de  $\vec{B}$  permanece fixa e a taxa de variação de  $B$  é  $dB/dt$ .

Quais são o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico induzido no plano da página (a) a uma distância  $r < R$  do centro da região circular e (b) a uma distância  $r > R$  do centro, onde  $B = 0$ ?



$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad \text{e} \quad \varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

portanto

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

onde

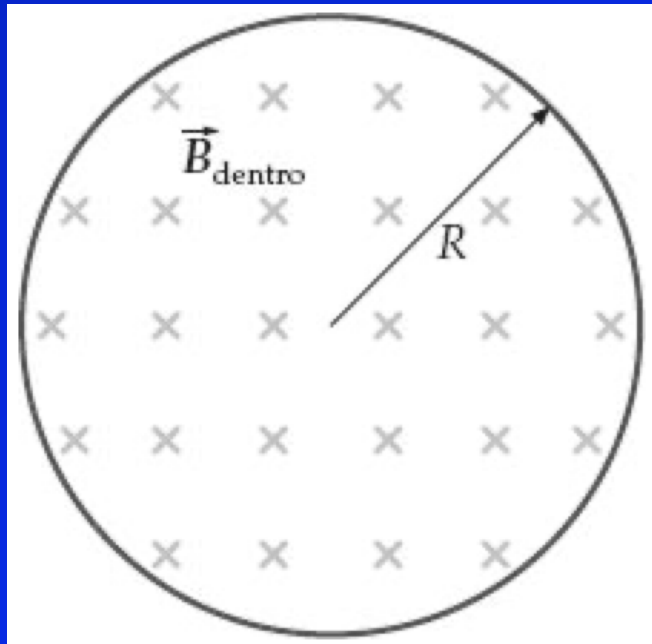
$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

Retomando do slide anterior  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt}$ ,

Para o cálculo do fluxo magnético, tomaremos  $\hat{n}$  com sentido para dentro da superfície, o que gera (pela regra da mão direita) o sentido positivo da integração  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  no sentido horário, assim

para  $r < R$  
$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_S B_n dA = B_n \int_S dA = BA = B \pi r^2$$

portanto 
$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}(B\pi r^2) = \frac{dB}{dt} \pi r^2$$



Considerando agora a integração  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ , teremos que  $E_t$  (componente tangencial de  $\vec{E}$ ) é determinada a partir da integral de linha para um círculo de raio  $r$ . Por simetria,  $\vec{E}$  é tangente ao círculo e tem o mesmo módulo em todos os pontos do círculo, assim

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C E_t d\ell = E_t \oint_C d\ell = E_t 2\pi r$$

Retomando as equações de interesse do slide anterior

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt} \quad \text{onde} \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_t 2\pi r \quad \text{e} \quad \frac{d\phi_m}{dt} = \frac{dB}{dt} \pi r^2$$

Assim, para  $r < R$ , teremos

$$E_t 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi r^2$$

e, portanto,

$$E_t = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad r < R$$

Veja que com a escolha de  $\hat{n}$  com sentido para dentro da superfície, obtivemos um valor negativo para  $E_t$ , o que significa que o sentido de  $\vec{E}$  é oposto ao sentido positivo da integração e, portanto, é no sentido anti-horário.



Para  $r > R$  a integral de linha é a mesma  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_t 2\pi r$ , e o fluxo magnético fica  $\phi_m = B\pi R^2$ , portanto,  $E_t 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi R^2$  ou

$$E_t = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \quad r > R$$

E o sentido de  $\vec{E}$ , também é anti-horário

Observe que o campo elétrico neste exemplo é produzido por um campo magnético variável e não por cargas elétricas.

Observe, também, que  $\vec{E}$  e, portanto, a fem, existe ao longo de qualquer circuito fechado limitando a área na qual o fluxo magnético está variando, independentemente da existência, ou não, de um fio ou de um circuito ao longo da curva.

