Mecânica I – PME3100

Aula 23
Capítulo 12 – Dinâmica dos Sólidos

10.3 – Teorema do Momento Angular
(Teorema da Quantidade de Movimento Angular)

Seja $\boldsymbol{m_i}$ a massa de um ponto genérico $\boldsymbol{P_i}$ pertencente a um sistema $\boldsymbol{S}$ e

$\bar{v}_i \Rightarrow$ sua velocidade num certo instante

Definição: momento angular (quantidade de movimento angular) de $\boldsymbol{S}$ em relação a um ponto $\boldsymbol{O}$, o vetor

$$\boxed{\bar{H}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \bar{v}_i}$$

Derivando a equação anterior em relação a *t*

$$\dot{\bar{H}}_O = \sum_i (\bar{v}_i - \bar{v}_O) \wedge m_i \bar{v}_i + \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \bar{a}_i$$

$$\Downarrow$$

(informação do slide 5 da aula 21)

$$\boxed{\dot{\bar{H}}_O = \bar{M}_O^{ext} + m\bar{v}_G \wedge \bar{v}_O}$$

$\overline{M}_O^{ext}$ representa o momento, em relação ao ponto ***O***, das forças externas ao sistema ***S***

Teorema do Momento Angular - TMA (Teorema da Quantidade de Movimento Angular - TQMA)

12.2 – Momento Angular de um Sólido
(Quantidade de Movimento Angular de um Sólido)

Considere um corpo rígido ***S***. Seu momento angular pode ser expresso de maneira simples como nos dois casos a seguir:

a) S tem movimento de translação (com velocidade $\bar{v}$)

$$\bar{H}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \bar{v}_i = \sum_i m_i (P_i - O) \wedge \bar{v}_i$$

resultando em

$$\boxed{\bar{H}_O = m(G - O) \wedge \bar{v}}$$

b) ***S*** *tem movimento qualquer*

$\overline{H}_O$ terá uma expressão simples se tomarmos como ***O***, um ponto de ***S***

$$\bar{H}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \bar{v}_O + \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \bar{\omega} \wedge (P_i - O)$$

$$\bar{H}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \bar{v}_O + \bar{\Sigma}_2$$

Considerando o sistema de coordenadas $O\bar{\imath}\,\bar{\jmath}\,\bar{k}$, com origem O pertencente a $\boldsymbol{S}$ e escrevendo:

$$\bar{\omega} = \omega_1\bar{\imath} + \omega_2\bar{\jmath} + \omega_3\bar{k} \qquad\qquad P_i - O = x_i\bar{\imath} + y_i\bar{\jmath} + z_i\bar{k}$$

$$\bar{\omega} \wedge (P_i - O) = \omega_1\left(y_i\bar{k} - z_i\bar{\jmath}\right) + \omega_2\left(z_i\bar{\imath} - x_i\bar{k}\right) + \omega_3(x_i\bar{\jmath} - y_i\bar{\imath})$$

Voltando em $\bar{\Sigma}_2$

$$\bar{H}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \bar{v}_O + \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \bar{\omega} \wedge (P_i - O)$$

$$\bar{H}_O = m(G - O) \wedge \bar{v}_O + \omega_1 \bar{S}_1 + \omega_2 \bar{S}_2 + \omega_3 \bar{S}_3$$

$$\bar{S}_1 = \sum_i m_i (P_i - O) \wedge \left[\bar{\imath} \wedge \left(x_i \bar{\imath} + y_i \bar{\jmath} + z_i \bar{k}\right)\right]$$

$$\bar{S}_1 = \sum_i m_i \left[\left(y_i^2 + z_i^2\right)\bar{\imath} - x_i y_i \bar{\jmath} - x_i z_i \bar{k}\right] = J_x \bar{\imath} - J_{xy} \bar{\jmath} - J_{xz} \bar{k}$$

Analogamente

$$\bar{S}_2 = J_y\bar{j} - J_{yz}\bar{k} - J_{yx}\bar{\imath} \qquad \bar{S}_3 = J_z\bar{k} - J_{zx}\bar{\imath} - J_{zy}\bar{j}$$

Voltando

$$\bar{H}_O = m(G-O)\wedge\bar{v}_O + \omega_1\left(J_x\bar{\imath} - J_{xy}\bar{j} - J_{xz}\bar{k}\right) + \omega_2(\bullet\bullet\bullet) + \omega_3(\bullet\bullet\bullet)$$

$$\boxed{\bar{H}_O = m(G - O) \wedge \bar{v}_O + I_O \bar{\omega}}$$

Caso particular: se $O = G$

$$\boxed{\bar{H}_G = I_G \bar{\omega}}$$

$$\dot{\bar{H}}_O = m(\bar{v}_G - \bar{v}_O) \wedge \bar{v}_O + m(G - O) \wedge \bar{a}_O + \frac{d}{dt}(I_O \bar{\omega})$$

$$\dot{\bar{H}}_O = m(\bar{v}_G \wedge \bar{v}_O) + m(G - O) \wedge \bar{a}_O + \frac{d}{dt}(I_O \bar{\omega})$$

$$\boxed{\dot{\bar{H}}_O = \bar{M}_O^{ext} + m\bar{v}_G \wedge \bar{v}_O} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{M}_O^{ext} = m(G - O) \wedge \bar{a}_O + \frac{d}{dt}(I_O \bar{\omega})}$$

Lembra-se da equação acima? *TMA (TQMA)*

$$\bar{M}_O^{ext} = m(G - O) \wedge \bar{a}_O + \frac{d}{dt}(I_O \bar{\omega})$$

A equação acima se torna bastante simples em três casos particulares

1. ***G = O***

$$\bar{M}_G^{ext} = \frac{d}{dt}(I_G \bar{\omega})$$

2. $\bar{a}_O = \bar{0}$ (por exemplo, ***O*** ponto fixo)

$$\bar{M}_O^{ext} = \frac{d}{dt}(I_O \bar{\omega})$$

3. ***(G - O)*** paralelo a $\bar{a}_O$

$$\bar{M}_O^{ext} = \frac{d}{dt}(I_O \bar{\omega})$$

Um comentário

Geralmente adota-se um sistema $O\bar{\imath}\,\bar{\jmath}\,\bar{k}$ ligado a ***S***; neste caso $\boldsymbol{J_x}$, $\boldsymbol{J_{xy}}$, etc. são constantes e a derivada de $I_O\bar{\omega}$ é simplesmente $I_O\dot{\bar{\omega}}$

$\boxed{\bar{M}_O^{ext} = I_O\dot{\bar{\omega}}}$ inclusive $\boxed{\bar{M}_G^{ext} = I_G\dot{\bar{\omega}}}$

E2 – P3 – 1º sem. 2015

2ª Questão (4,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, a barra AB, de massa m e comprimento L, está articulada no ponto A ao disco de massa m e raio R. O sistema parte do repouso, com a barra AB vertical e com a reta que passa por O e A inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. Em um dado instante inicial, o disco passa a ter uma aceleração angular conhecida $\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\Omega}\,\vec{k}$. Para este instante inicial, pede-se:

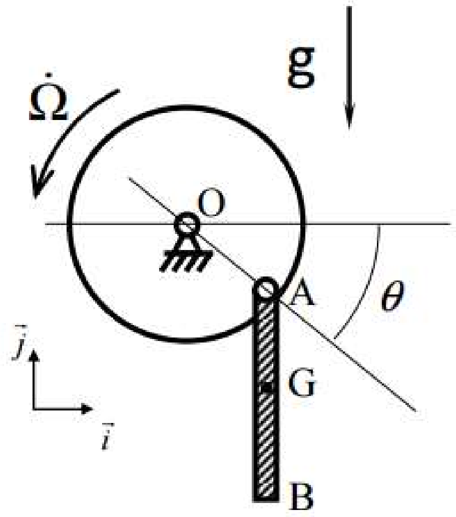
(a) o diagrama de corpo livre do disco e o diagrama de corpo livre da barra;

(b) a aceleração do ponto A;

(c) o vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ da barra;

(d) a aceleração do baricentro da barra;

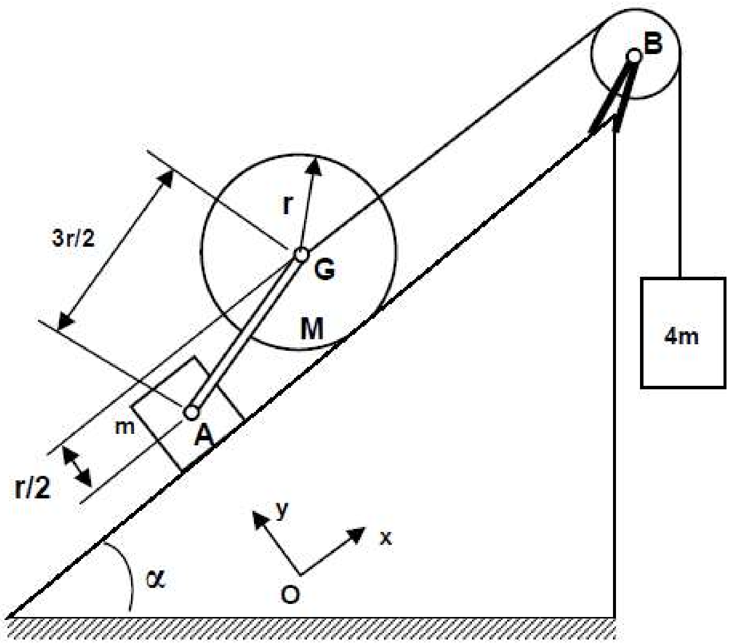
(e) a força que o disco aplica na barra pela articulação do ponto A.



Dado: Para o disco $J_{z_O} = \dfrac{mR^2}{2}$, para a barra $J_{z_G} = \dfrac{mL^2}{12}$

Capítulo 10 – Dinâmica dos Sistemas	Capítulo 12 – Dinâmica dos Sólidos
10.3 Teorema do Momento Angular (Teorema da Quantidade de Movimento Angular)	12.2 Momento Angular de um Sólido (Quantidade de Movimento Angular de um Sólido) 12.2.1 TMA (TQMA) Aplicado em um sólido

E1 – P3 – 1º sem. 2010



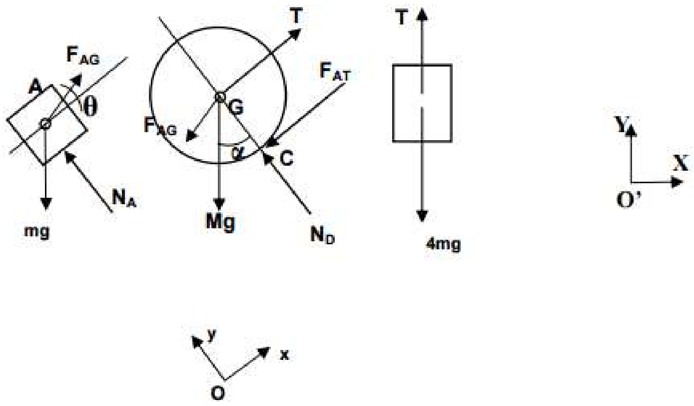
QUESTÃO 1 (5 pontos): Um disco homogêneo de massa **M** e raio **r** liga-se a um bloco homogêneo de massa **m** por meio de uma barra de comprimento **L=3r/2** e massa desprezível. O disco rola sem escorregar para cima sobre uma rampa (de inclinação **α**, constante) devido à ação da força de tração de um cabo ideal que, enrolado a uma polia ideal de massa desprezível, conecta-se a um bloco homogêneo de massa **4m**. Considere o atrito entre o bloco de massa **m** e a rampa desprezível. Para a configuração indicada e adotando-se o sistema de referência inercial **Oxy**, com **Ox** paralelo à rampa, pedem-se:

a) os diagramas de corpo livre dos blocos e do disco;
b) as equações do TMB e do TMA (onde pertinente) para os mesmos corpos rígidos citados no item (a);
c) a aceleração do bloco de massa m;
d) a aceleração angular do disco;
e) a força de tração no cabo.

Dado, para um disco homogêneo de massa M e raio r: $J_{Gz}=Mr^2/2$

Solução

a) diagramas de corpo livre **(1 ponto)**



b) equações do TMB (blocos e disco) e TMA (disco), de acordo com o sistema de referência adotado:

TMB - Bloco de massa m **(0,5 pontos)** TMB- Bloco de massa $4m$ **(0,5 pontos)** *TMB* – Disco **(0,5 pontos)**

$\vec{i}: F_{AG}\cos\theta - mg\,\text{sen}\alpha = ma_{Ax}$ (1)

$\vec{j}: -mg\cos\alpha + F_{AG}\text{sen}\theta + N_A = 0$ (2)

$\vec{J}: T - 4mg = -4ma$ (3)

$\vec{i}: -F_{AG}\cos\theta - Mg\,\text{sen}\alpha - F_{AT} + T = Ma_{Gx}$ (4)

$\vec{j}: -F_{AG}\text{sen}\theta - Mg\cos\alpha + N_D = 0$ (5)

TMA – Disco (em relação ao baricentro) **(0,5 pontos)**
Como o ponto C é o CIR, o disco é homogêneo e o problema é plano, o TMA reduz-se a

$$J_{Gz}\dot{\omega} = M_G^{EXT} = r.F_{AT} \Rightarrow \frac{Mr^2}{2}\dot{\omega} = r.F_{AT} \Rightarrow \frac{Mr}{2}\dot{\omega} = F_{AT} \quad (6)$$

Tem-se as incógnitas: $\dot{\omega}, F_{AT}, N_A, N_D, F_{AG}, a, a_{Gx}, a_{Ax}$ e somente 6 equações. No entanto, como C é o CIR,

$\dot{\omega}r = a_{Gx}$ e, ainda, como a barra AG é rígida e não sofre rotação, $a_{Gx} = a_{Ax} = a$, o que permite a solução do problema.

Solução

Itens c (1 ponto), d (0,5 pontos), e (0,5 pontos)

de (6) $F_{AT} = \frac{M}{2}a$ (7).

de (3) $T = 4m(g-a)$ (8). Da geometria dada, $\text{sen}\,\theta = 1/3$, $\cos\theta = 2\sqrt{2}/3$. Com esses valores, de (1),

$F_{AG} = m(a + g\,\text{sen}\alpha)\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (9). Substituindo-se (7), (8) e (9) em (4),

$$-m(a+g\,\text{sen}\alpha)\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3} - Mg\text{sen}\alpha - \frac{Ma}{2} + 4m(g-a) = Ma \Rightarrow \boxed{a = \frac{g[4m-(m+M)\text{sen}\alpha]}{5m+3M/2} \quad \text{(c)}}$$

Da relação cinemática entre o CIR e o baricentro do disco obtém-se

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{g}{r}\frac{[4m-(m+M)\text{sen}\,\alpha]}{5m+3M/2} \quad \text{(d)}}$$

Diferença entre o feito em sala e o gabarito da prova

De (9) obtém-se $\boxed{F_{AG} = mg\left[\frac{[4m-(m+M)\text{sen}\alpha]}{5m+3M/2} + \text{sen}\alpha\right]\frac{3\sqrt{2}}{4} \quad \text{(e)}}$

E3 – P3 – 2º sem. 2013

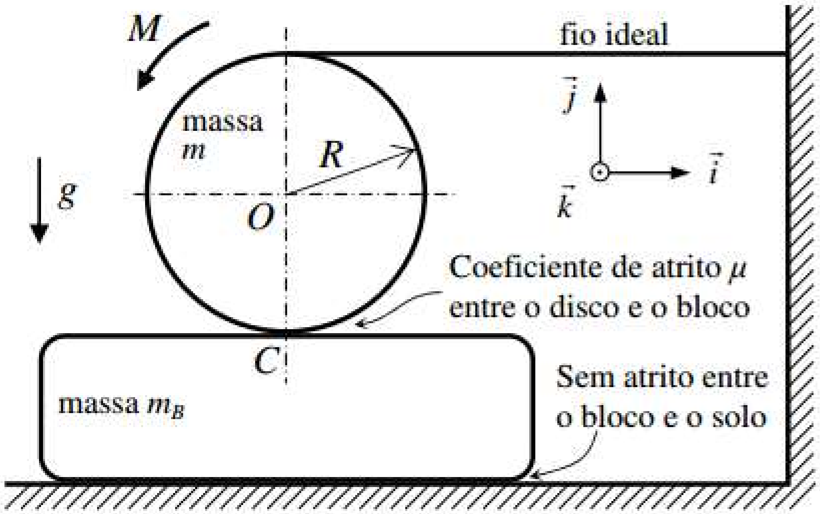
QUESTÃO 3 (4,0 pontos) – O sistema mostrado na figura é composto por um disco de massa m e raio R e um bloco de massa m_B. O disco é acionado por um binário de momento M. Não há escorregamento entre o disco e o bloco e entre o fio ideal e o disco. Pede-se:

a) Os diagramas de corpo livre do disco e do bloco.

b) A aceleração $\vec{a}_O$ do centro O do disco e a aceleração $\vec{a}_B$ do bloco em função da aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco.

c) Calcular a aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco, a aceleração $\vec{a}_O$ do centro O do disco, a aceleração $\vec{a}_B$ do bloco, a força de atrito F_{at} entre o disco e o bloco e a tração T no fio.

d) Calcular o momento máximo M_{max} que pode ser aplicado sem que ocorra escorregamento no contato entre o disco e o bloco.



PERGUNTAS?