SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE COEFICIENTES CONSTANTES NO PLANO

1. Um exemplo

Vamos considerar, inicialmente, o caso de sistemas 2×2 e coeficientes constates, ou seja, sistemas da forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy, \end{aligned}$$

sendo a, b, c e d constantes reais.

Exemplo 1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 3y \\ \dot{y} &= 2x + y \end{aligned}$$

ou, em forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são -1 e 4, com autovetores associados $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, respectivamente.

Vamos fazer uma mudança linear de variáveis:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Date: November 8, 2020.

Então temos:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Portanto;

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, nas novas variáveis u e v, o sistema se torna "desacoplado"

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -u \\
\dot{v} &= 4v,
\end{aligned}$$

cujas soluções são
$u(t) = C_1 e^{-t}$ e $v(t) = C_2 e^{4t}$.

O par $(u(t), v(t)) = (C_1 e^{-t}, C_2 e^{4t})$, define uma curva no plano uv, cuja forma vamos investigar em seguida. No plano xy teríamos curvas com o mesmo aspecto qualitativo, que seriam a imagem das curvas no plano uv, pela transformação definida pela mudança de variáveis acima, ou seja

$x(t) = C_1e^{-t} + 3C_2e^{4t}$, $y(t) = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{4t}$.

Vamos então considerar as diferentes possibilidades para sistemas lineares no plano. No que segue, suporemos sempre que a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é não singular, isto é, 0 não é autovalor de $\mathbf{A}$.

2. Autovalores reais distintos

Suponhamos que a matriz $\mathbf{A}$ possua dois autovalores reais distintos λ e μ, Neste caso, como vimos, existem sempre dois autovetores linearmente independentes $\vec{w_1} =$ e $\vec{w_2}$ associados respectivamente a λ e μ.

Fazendo uma mudança linear de variáveis:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u\vec{w_1} + v\vec{w_2} = \begin{bmatrix} w_1^1 & w_2^1 \\ w_1^2 & w_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

como no exemplo acima, obtemos o sistema "desacoplado":

$$\dot{u} = \lambda u$$
$$\dot{v} = \mu v,$$

cujas soluções são

$$u(t) = C_1e^{\lambda t} \text{ e } v(t) = C_2e^{\mu t}.$$

Se $C_1 = C_2 = 0$, temos a solução nula. No caso geral, o par $(u(t), v(t)) = (C_1e^{\lambda t}$ e $v(t) = C_2e^{\mu t})$, define uma curva no plano uv, cuja 'forma' depende do quociente λ/μ. No que segue, vamos supor $C_1 \neq 0$ (considerações análogos valem se $C_2 \neq 0$).

2.1. $\lambda/\mu > 1$**.** Então temos $v(t)^\lambda = C_2^\lambda e^{\lambda\mu t}$ e $u(t)^\mu = C_1^\mu e^{\lambda\mu t}$. Portanto, $v(t) = \frac{C_2}{C_1^{\mu/\lambda}} u(t)^{\frac{\mu}{\lambda}}$ e a curva parametrizada $(u(t), v(t)), \quad -\infty < t < \infty$ coincide com o gráfico da função $v = Cu^\alpha, \quad x > 0$, com

$\alpha = \frac{\mu}{\lambda} < 1$ e $C = \frac{C_2}{C_1^{\mu/\lambda}}$. Abaixo, o esboço da curva para alguns valores de C_1 e C_2, no caso em que λ e μ são positivos. Caso ambos sejam negativos, o sentido de percurso das curvas se inverte.

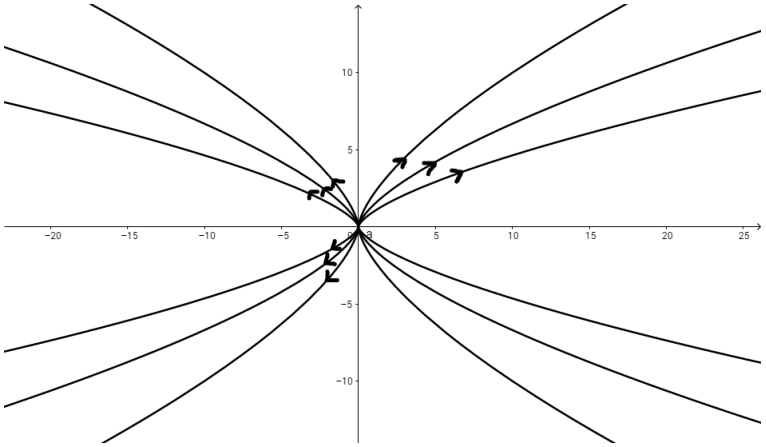

FIGURE 1. $\lambda/\mu > 1$

2.2. $0 < \lambda/\mu < 1$**.** De modo análogo, obtemos $v(t)^\lambda = \frac{C_2^\lambda}{C_1^\mu} u(t)^\mu$ e a curva parametrizada $(u(t), v(t)), \quad -\infty < t < \infty$ coincide com o gráfico da função $v = Cu^\alpha, \quad u > 0$, com $\alpha = \frac{\mu}{\lambda} > 1$ e $C = \frac{C_2}{C_1^{\mu/\lambda}}$. Abaixo, o esboço da curva para alguns valores de C_1 e C_2. no caso em que λ e μ são positivos. Caso ambos sejam negativos, o sentido de percurso das curvas se inverte.

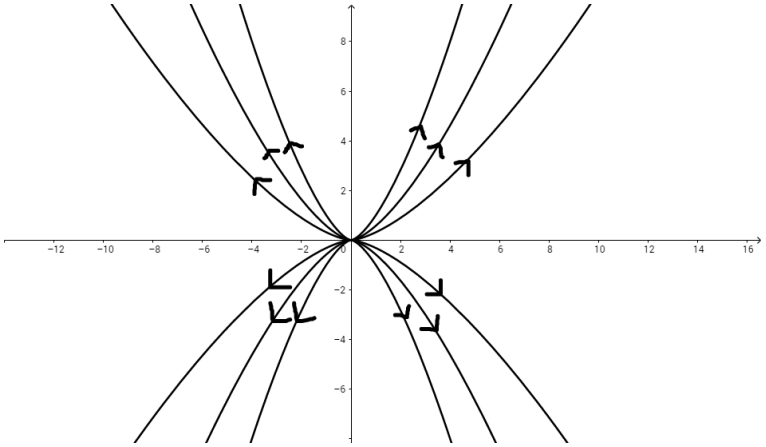

FIGURE 2. $0 < \lambda/\mu < 1$

2.3. $\lambda/\mu < 0$**.** Procedendo analogamente, obtemos $v = Cu^{\alpha}, \quad u > 0$, com $\alpha = \frac{\mu}{\lambda} < 0$ e $C = \frac{C_2}{C_1^{\mu/\lambda}}$. Abaixo, o esboço da curva para alguns valores de C_1 e C_2. no caso em que $\lambda > 0$ e $\mu < 0$ são positivos. Trocando o sinal de ambos, o sentido de percurso das curvas se inverte.

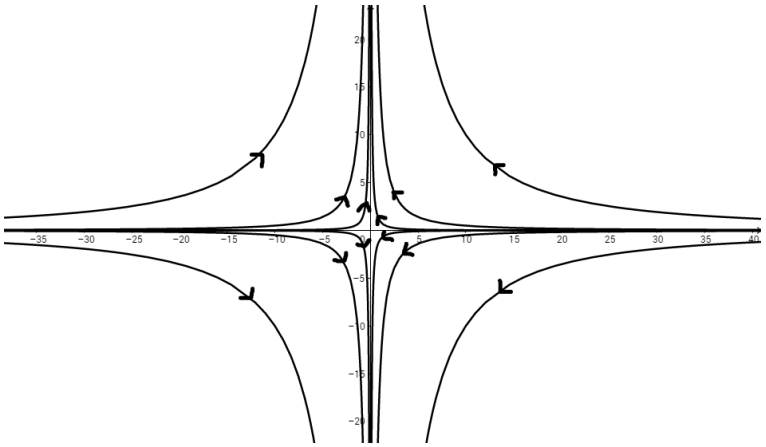

FIGURE 3. $\lambda/\mu < 0$

3. Um único autovalor real

Neste caso, temos duas situações distintas. No caso mais simples, temos um nico autovalor λ e o autoespaço associado tem dimensão 2, ou seja, existem *duas autofunções* linearmente independentes w_1 e w_2 associadas a λ. Nesse caso, a situação é análoga ao caso de autovalores reais distintos λ e μ, que agora coincidem.

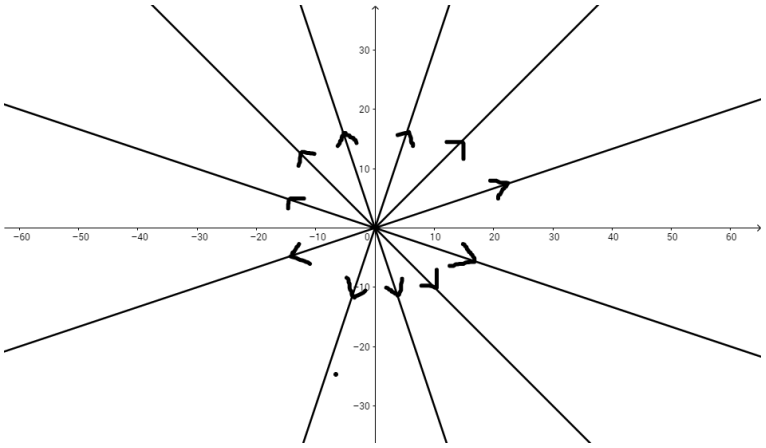

Figure 4. $\lambda/\mu = 1$, auto espaço de dimensão 2

3.1. $\lambda/\mu = 1$ com autoespaço de dimensão 2.

Finalmente, consideramos os casos em que não podemos encontrar duas autofunções linearmente independentes. Nesse caso a matriz do sistema não pode ser diagonalizada e, portanto, não podemos transformar o sistema original em um sistema "desacoplado" por uma mudança linear de coordenadas.

4. Um único autovalor real com autoespaço de dimensão 1

Consideremos o seguinte:

Exemplo 2.

$$\dot{x} = 3x - 18y$$
$$\dot{y} = 2x - 9y$$

ou, em forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A equação característica é $(\lambda + 3)^2 = 0$ e, portanto, o único autovalor é $\lambda = -3$

Para encontrar os autovetores associados a -3, devemos resolver a equação:

$$\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtendo $x - 3y = 0 \Leftrightarrow x = 3y$.

tomando $y = 1$, obtemos o autovetor associado

$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Qualquer outro autovetor associado a $\lambda = -3$ será um múltiplo de v e, portanto, *não existe uma base de* $\mathbb{R}^2$ *formada por autovetores da matriz dos coeficientes* A. Vamos então procurar

um *autovetor generalizado*, ou seja um vetor w tal que $(A-\lambda)w = v$. onde $\lambda = -3$ é o único autovalor da matriz A e v é autovetor associado. Temos então a equação:

$$\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

obtendo $2x - 6y = 1 \Leftrightarrow x = 3y + 1/2$.
tomando $y = 0$, obtemos o autovetor generalizado
$w = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Fazendo a mudança linear de variáveis:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

obtemos:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Portanto;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, nas novas variáveis u e v, o sistema se torna

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -3u + v \\ \dot{v} &= -3v. \end{aligned}$$

Da segunda equação, obtemos
$v(t) = C_1 e^{-3t}$ e, substituindo na primeira

$\dot{u} + 3u = C_1 e^{-t}$, de onde $u(t) = C_2 t e^{-3t} + C_1 e^{-3t}$.

Segue um esboço da curva $(u(t), v(t))$, para alguns valores das constantes C_1 e C_2.

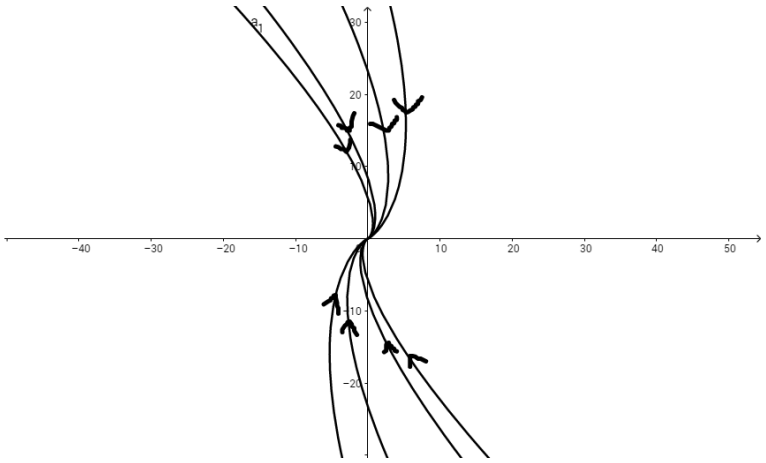

FIGURE 5. $\lambda/\mu = 1$, autoespaço de dimensão 1

De fato, pode-se mostrar que o procedimento acima pode ser estendido para o caso geral de um único autovalor real com autoespaço de dimensão 1, ou seja dado o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

se a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, possui um único autovalor real λ, associado ao autovetor v, então podemos sempre encontrar um autovetor generalizado w, tal que $(A - \lambda)w = v$. Seja $\mathbf{B}$ a matriz cujas colunas são os vetores v e w e u, v novas variáveis definidas por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Então, teremos, após alguns cálculos $\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$.

Assim, nas novas variáveis u e v, o sistema se torna

$$\dot{u} = \lambda u + v$$
$$\dot{v} = \lambda v.$$

Da segunda equação, obtemos
$v(t) = C_1 e^{\lambda t}$ e, substituindo na primeira
$\dot{u} - \lambda u = C_1 e^{\lambda t}$, de onde $u(t) = C_2 t e^{\lambda t} + C_1 e^{\lambda t}$.

Segue um esboço da curva $(u(t), v(t))$, com $\lambda = 1$ e alguns valores para C_1 e C_2.

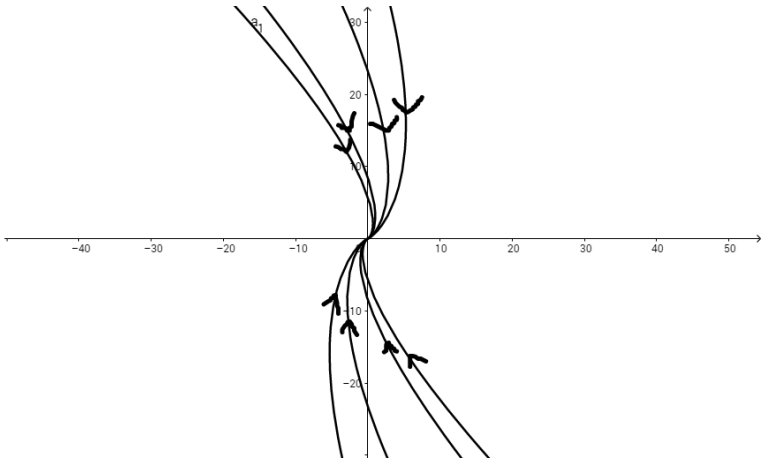

FIGURE 6. $\lambda/\mu = 1$, autoespaço de dimensão 1

5. Autovalores complexos

Suponhamos finalmente que a a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, possui um autovalor complexo $\lambda = \alpha + i\beta$, associado ao autovetor *complexo* v. Então como os coeficientes da matriz são, por hipótese, reais, teremos,

$$(A-\lambda)v = 0 \to \overline{A-\lambda}\overline{v} = 0 \to (A-\overline{\lambda})\overline{v} = 0.$$

Portanto, $\overline{\lambda}$ é outro autovalor de A associado ao autovetor $\overline{v}$. Passando então para o campo complexo, podemos proceder exatamente como no caso de autovalores reais distintos, obtendo, após uma mudança de variáveis linear, as soluções *complexas*.

$\xi(t) = e^{\lambda t}v = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\text{sen }\beta t)v$ e $\eta(t) = e^{\overline{\lambda}t}\overline{v} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\text{sen }\beta t)\overline{v}$.

Escrevendo agora $v = v_1 + iv_2$, teremos

$\xi(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t v_1 - \text{sen }\beta t v_2) + ie^{\alpha t}(\cos\beta t v_2 + \text{sen }\beta t v_1)$

$\eta(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t v_1 - \text{sen }\beta t v_2) - ie^{\alpha t}(\cos\beta t v_2 + \text{sen }\beta t v_1)$.

Usando o princípio da superposição, obtemos as soluções reais:

$u(t) = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = e^{\alpha t}(\cos\beta t v_1 - \text{sen }\beta t v_2)$ e

$v(t) = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = e^{\alpha t}(\text{sen }\beta t v_1 + \cos\beta t v_2)$.

A solução geral será dada pela combinação linear

$$C_1u(t) + C_2v(t) =$$
$$e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\text{sen }\beta t)v_1 + e^{\alpha t}(C_2\cos\beta t - C_1\text{sen }\beta t)v_2.$$

Observemos adicionalmente que,

$$Av = \lambda v \Rightarrow A(v_1 + iv_2) = (\alpha + i\beta)(v_1 + iv_2) \Rightarrow A(v_1) = \alpha v_1 - \beta v_2$$
$$\text{e } A(v_2) = \alpha v_2 - \beta v_1$$

Portanto, a a matriz de A na base $\{v_1, v_2\}$ será

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

As soluções $u(t), v(t)$, obtidas acima serão as soluções do sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Abaixo, algumas trajetórias para diferentes valores dos parâmetros α e β, C_1, C_2.

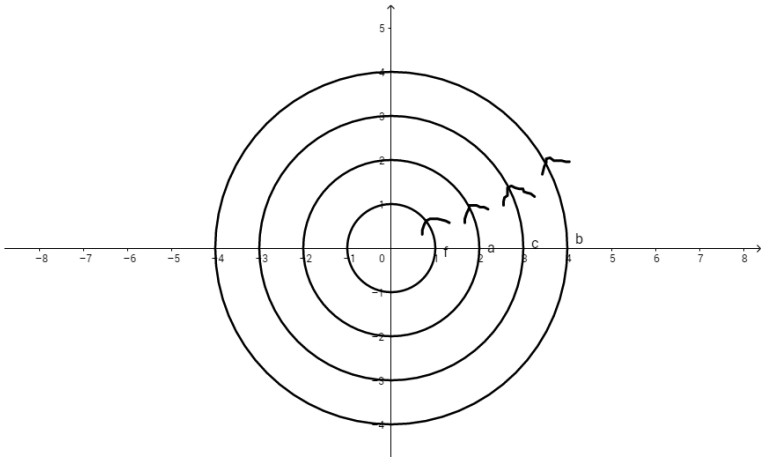

FIGURE 7. $\lambda = 2\pi i$

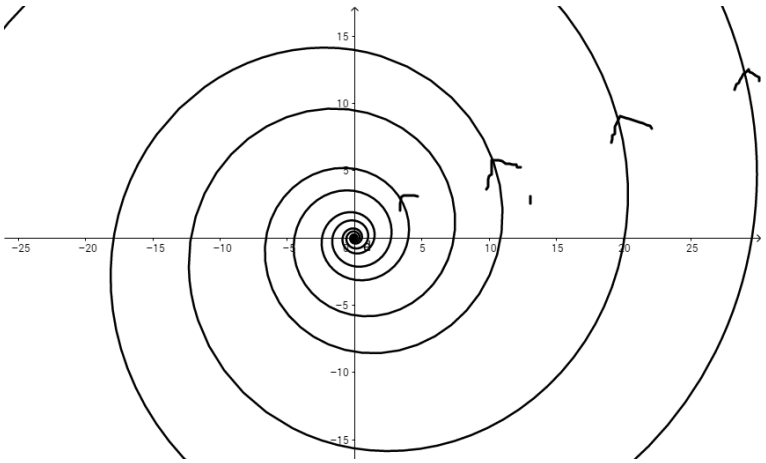

FIGURE 8. $\lambda = 1 + 2\pi i$

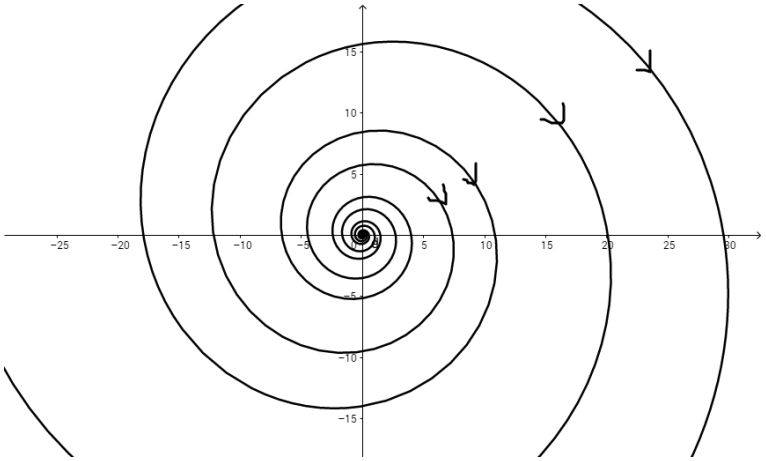

FIGURE 9. $\lambda = 1 - 2\pi i$