AULA MECÂNICA 16/11 (1)

- TRANSFORMADA DE LEGENDRE.

$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f FUNÇÃO CONVEXA.

DEFINIÇÃO.

f^* TRANSFORMADA DE LEGENDRE DE f:

$$J = \{p \mid \sup_{x \in I} p \cdot x - f(x) < +\infty\}.$$

$f^*: J \to \mathbb{R}$

- $f^*(p) = \sup_{x \in I} p \cdot x - f(x)$.

- ALGUNS EXEMPLOS SIMPLES.

f $\quad$ f^*

- $\frac{C \cdot x^2}{2} \to \frac{x^2}{2C}$.

- $\frac{x^2}{2} \to \frac{x^\beta}{\beta}$ $\quad$ β TAL QUE $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{2} = 1$

- EXEMPLO: $f(x) = |x|$.

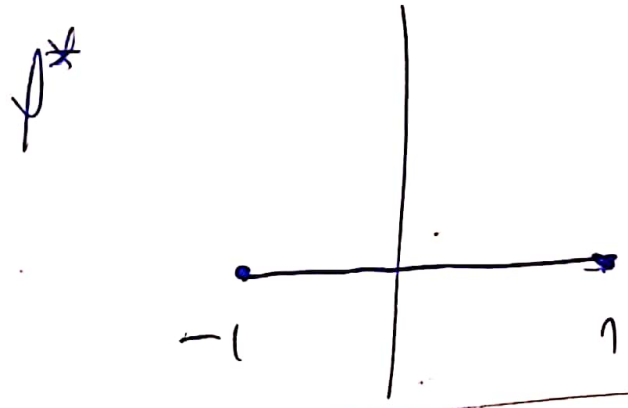
Digitalizado com

SE $|p| > 1$ ENTÃO

$\sup_{x \in \mathbb{R}} px - |x| = +\infty$.

SE $-1 \leq p \leq 1$

$\sup_{x \in \mathbb{R}} px - |x| = 0$.



QUANDO $\varphi \in C^2$, $\varphi'' \geq a > 0$. (11)

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi^* \in C^2$, φ^* É CONVEXA $(\varphi^*)'' > 0$, $\forall p$.

$(\varphi')^{-1}$

SE VALE (1), ENTÃO φ' É UM HOMEOMORFISMO DE $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Digitalizado com

$(f')^{-1}$ ESTÁ BEM DEFINIDA É

$$(f')^{-1} = (f^*)'$$

É, EM PARTICULAR,

$\exists\, x_p$ TAL QUE

$$f^*(p) = p \cdot x_p - f(x_p)$$

$$f'(x_p) = p.$$

SE TOMARMOS $f^{**}(y) = \sup_{p \in \mathbb{R}} y \cdot p - f^*(p) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{**} = f$ → TRANSFORMADA É UMA INVOLUÇÃO!

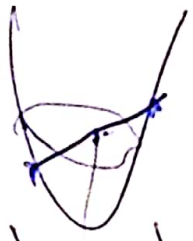
DESIGUALDADE DE YOUNG $f^*(p) + f(x) \geq p \cdot x$,

$\forall\, p, x$ NOS DOMÍNIOS RESPECTIVOS.

Digitalizado com

TRANSFORMADA DE LEGENDRE P/ FUNCÕES

$\varphi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ CONVEXAS.



$x_1, x_2 \quad 0 \leq \alpha \leq 1$

$$\varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leq \alpha \varphi(x_1) + 1-\alpha \varphi(x_2).$$

DEFINIMOS, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

$$\varphi^*: \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\varphi^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(\langle p, x \rangle - \varphi(x) \right)$$

$$\Omega = \{ p \mid \varphi^*(p) < +\infty \}.$$

Digitalizado com

EXERCÍCIO: MOSTRE QUE:

(1) Ω É CONVEXO.

(2) f^* É CONVEXA.

SE ASSUMIRMOS QUE (1) $f \in C^2$, E QUE. P/

TODO $x \in \Omega$ $Hf(x)$ Hf = HESSIANA DE

É UMA MATRIZ DEFINIDA POSITIVA f.

(3) ∇f É UMA: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ É UM HOMEOMORFISMO

ENTÃO:

f^* É C^2, $Hf^*(p)$ É SEMPRE DEFINIDA

POSITIVA, E VALE QUE.

- DADO $p \in \mathbb{R}^N$, $\exists! x_p$ TAL QUE.

$$f^*(p) = \langle p, x_p \rangle - f(x_p)$$ E ALÉM

DISSO $\nabla f(x_p) = p$.

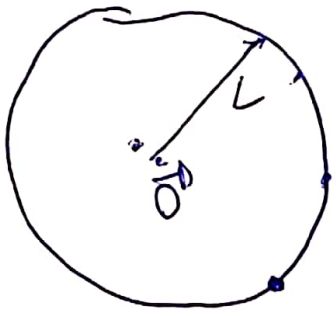
Digitalizado com

SE VALE QUE

Fato.

$\langle H f(x) y, y \rangle \geq a y^2$, $\forall y$, $\forall x$.

ENTÃO ∇f É UM HOMEOMORFISMO.



IDEIA: DADO N, $\exists L > 0$ TAL QUE, SE $\|x\| > L \Rightarrow$ $\|\nabla f(x)\| \geq N$.

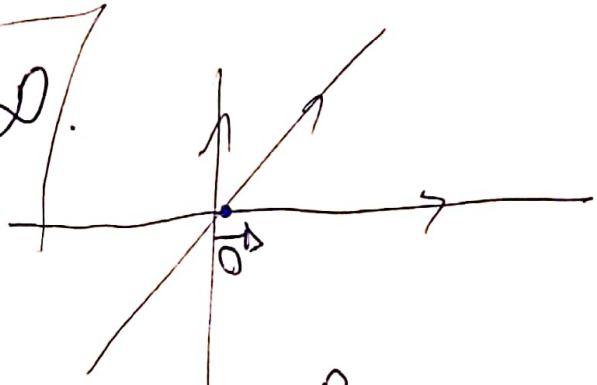
$f \in C^2$.

VAMOS SUPOR QUE:

$\exists\, a > 0$ TAL QUE $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, VALE QUE $\langle H f(x) y, y \rangle \geq a y^2$.

(1) TEMOS QUE:

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{2\|x\|} = +\infty$$ SSE $\forall\, 2 \in \mathbb{R}$.

Digitalizado com

$\Rightarrow$ ENTÃO, TEMOS QUE, P/ TODO $p \in \mathbb{R}^N$

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \langle p, x \rangle - f(x) = -\infty.$$

$\Rightarrow$ LOGO $\forall p$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \langle p, x \rangle - f(x)$

EXISTE E EXISTE ALGUM x_p TAL QUE:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \langle p, x \rangle - f(x) = \langle p, x_p \rangle - f(x_p)$$

$\Rightarrow x_p$ É PONTO DE MÁXIMO DA FUNÇÃO $g_p(x) = \langle p, x \rangle - f(x)$

$\Rightarrow \nabla f(x_p) = p$. $\Rightarrow \nabla f$ É SOBREJETORA.

MAS POR SER ESTRITAMENTE CONVEXA ∇f É INJETORA.

∇f É UM DIFEOMORFISMO.

CASO PARTICULAR

QUANDO f É UMA FORMA QUADRÁTICA DEFINIDA POSITIVA.

Digitalizado com

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$$

$$\nabla\varphi(x) = Ax = p.$$

$$x_p = A^{-1}p$$

$$\varphi^*(p) = \langle p, x_p\rangle - \varphi(x_p) =$$

$$= \langle p, A^{-1}p\rangle - \frac{1}{2}\langle AA^{-1}p, A^{-1}p\rangle =$$

$$= \langle p, A^{-1}p\rangle - \frac{1}{2}\langle p, A^{-1}p\rangle =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\langle p, A^{-1}p\rangle} = \frac{1}{2}\langle Ax_p, A^{-1}Ax_p\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\langle Ax_p, x_p\rangle$$

$$\varphi^*(p) = \varphi(x_p).$$

Digitalizado com

ENTÃO

φ^* TAMBÉM É UMA FORMA QUADRÁTICA DEFINIDA POSITIVA, E TEM O MESMO VALOR EM p QUE φ TEM EM X_p.

FORMALISMO HAMILTONIANO:

SISTEMA MECÂNICO NEWTONIANO.

$$\ddot{X} = -\nabla U(X)$$

É EQUIVALENTE PROBLEMA VARIACIONAL DE ACHAR PONTOS EXTREMAIS P/ A AÇÃO.

$$\underset{L}{\varphi} = \int_{t_0}^{t_1} L(X(t), \dot{X}(t))\,dt$$

ONDE $L = \frac{1}{2}\|\dot{X}\|^2 - U(X)$.

Digitalizado com

OUTRA FORMULAÇÃO EQUIVALENTE (CONSERVATIVA) E.D.O.s

EQUAÇÃO DE E-L.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{P} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$P(x,\dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

$$\dot{P} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

~~DEFINIMOS O HAT~~

$$L : R^N \times R^N \times R \longrightarrow R \quad \text{FUNÇÃO } C^2.$$

$$L = L(q, \dot{q}, t).$$

ASSUMIR QUE: (1) L É CONVEXA NA SEGUNDA COORDENADA.

$$\forall \langle H_q L \cdot w, w \rangle \geq \alpha \|w\|^2,$$

$$\alpha > 0$$

$$\forall w \in R^N.$$

Digitalizado com

VAMOS DEFINIR

$$H(q,p,t) =$$

$$= \sup_{\dot{q}\in R^N} \langle p,\dot{q}\rangle - L(q,\dot{q},t)$$

TRANSFORMADA DE LEGENDRE DE L (NAS COORDENADAS $\dot{q}$)

EM PARTICULAR, DAS HIPÓTESES, TEMOS QUE, PARA TODO q, p, t FIXO, $\exists!\, \dot{q}_p$ TAL QUE

$$H(q,p,t) = \langle p,\dot{q}_p\rangle - L(q,\dot{q}_p,t).$$

É $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q}_p,t) = p.$

Digitalizado com

SE $q(t)$ É

$q_0 : I \to \mathbb{R}^N$ É UMA CURVA EXTREMAL DO

LAGRANGIANO L.

- DEFINIMOS UMA CURVA

- $\gamma_0 : I \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

- $\gamma_0(t) = (q_0(t), p_0(t))$ ONDE $p_0(t) = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q_0(t), \dot{q}_0(t), t)$

COMO q_0 SATISFAZ E-L.

SEI QUE $\dot{p}_0 = \dfrac{\partial L}{\partial q}(q_0, p_0, t)$.

(4)

$$\dot{q}_0 = \frac{\partial H}{\partial p}(q_0, p_0, t)$$

Digitalizado com

$$\frac{\partial H}{\partial q}(q_0, p_0, t) =$$

$$H(q,p,t) = \sup \langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}, t).$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}, t).$$

SE q_0 É CURVA EXTREMAL DE L,

ENTÃO

γ_0 SATISFAZ:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{p}_0 &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q}_0 &= \frac{\partial H}{\partial p}. \end{aligned}}$$

(EH)

Digitalizado com

CASO PARTICULAR:

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}\langle B(q,t)\cdot\dot{q},\dot{q}\rangle - U(q).$$

ONDE $B(q,t)$ É DEFINIDA POSITIVA.

$$H(q,p,t) = ?$$

$$H(q,p,t) = \langle p,\dot{q}_p\rangle - L(q,\dot{q}_p,t).$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = B(q,t)\cdot\dot{q}$$

$$\dot{q}_p = B^{-1}(q,t)\cdot p.$$

$$H(q,p,t) = \langle p,\dot{q}_p\rangle - L(q,\dot{q}_p,t)$$

Digitalizado com

$$H(q,p,t) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right\rangle - L(q,\dot{q},t).$$

$$L = T(q,\dot{q},t) - U(q,t).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$$

MAS T É HOMOGÊNEA DE GRAU 2 EM $\dot{q}$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right\rangle = 2T(q,\dot{q},t).$$

DÍVIDA

SEJA $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ É TAL QUE

$$g(\lambda X) = \lambda^N \cdot g(X)$$

ENTÃO $\langle X, \nabla g(X) \rangle = N \cdot g(X)$.

Digitalizado com

$$H = 2T(q,\dot{q},t) - (T(q,\dot{q},t) - U(q)) =$$

$$H(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) + U(q)$$

$$\boxed{H(q,p,t) = T(q,p,t) + U(q).}$$

PROPOSIÇÃO: SE H NÃO DEPENDE DE t ENTÃO:

- E $\gamma : I \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ É SOLUÇÃO DE (EH) ENTÃO. $\gamma(t) = (q(t), p(t))$.

$g(t) = H(\gamma(t))$ É UMA FUNÇÃO CONSTANTE.

$$\dot{g}(t) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} =$$

$$\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\cdot\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0.$$

Digitalizado com