

## Capítulo 9

# Verificação de Robustez: Valor Singular Estruturado e Análise $\mu$

*Neste capítulo, apresentam-se as técnicas para se determinar de um sistema de controle MIMO tem robustez de estabilidade e robustez de desempenho. Isso é feito através da chamada análise  $\mu$ , que usa o conceito de valor singular estruturado, que vale para sistemas MIMO em geral.*

### 9.1 Inclusão de incertezas em sistemas MIMO

O diagrama de blocos padrão de um sistema de controle robusto é apresentado na Fig. 9.1.

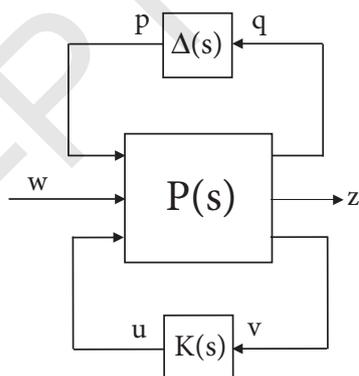


Figura 9.1: Diagrama de Blocos Geral para Controle Robusto

Como agora está incluída a incerteza, tem-se que representar a matriz de funções de transferência da planta estendida como:

$$\begin{bmatrix} q \\ z \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{31} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

No caso particular para incluir incertezas bem como o controlador, a planta é como apresentada na Fig. 9.2. Neste caso  $q = WGu$ ;  $z_2 = W_u u$ ;  $v = -d - p - Gu$ ;  $z_1 = -W_p(d + p + Gu)$ . Deste modo, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} q \\ z_1 \\ z_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WGu \\ W_p(-w - p - Gu) \\ W_u u \\ -w - p - Gu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & WG \\ -W_p & -W_p & | & -W_p G \\ 0 & 0 & | & W_u \\ -I & -I & | & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

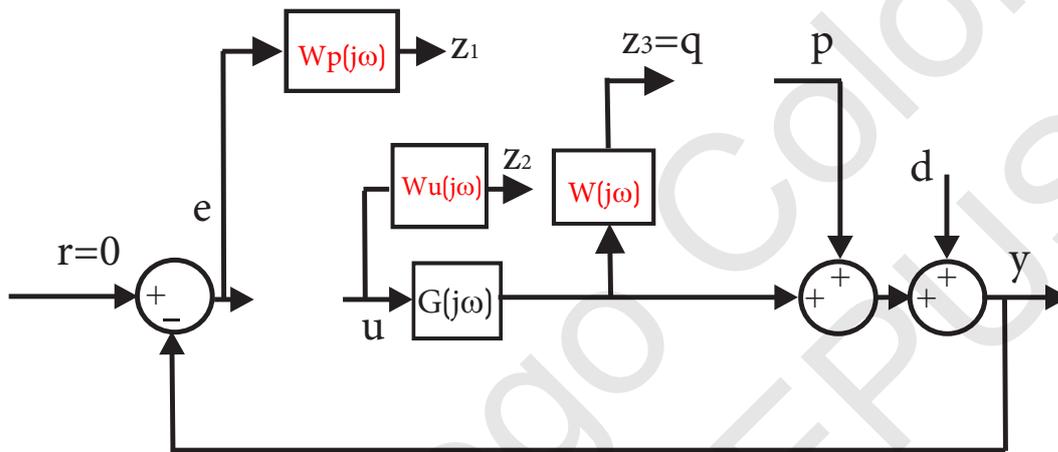


Figura 9.2: Planta estendida para Incluir Incertezas

Pode-se aplicar a transformação linear fracionária inferior para o sistema em Fig. 9.1, o que resulta em:

$$\mathcal{F}_l(P, K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -W_p & -W_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} WGKS \\ -W_p GKS \\ W_u KS \end{bmatrix} [ I \quad I ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -W_p & -W_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} WT & WT \\ -W_p T & -W_p T \\ W_u KS & W_u KS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WT & WT \\ -W_p S & -W_p S \\ W_u KS & W_u KS \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

Este sistema é exatamente o sistema em malha fechada nominal, já incluindo os pesos e o controlador projetado, o que resulta em:

$$\begin{bmatrix} q \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WT & | & WT \\ -W_p S & | & -W_p S \\ W_u KS & | & W_u KS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & | & N_{12} \\ N_{21} & | & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

De maneira geral, o sistema fica na forma apresentada na Fig. 9.3.

Deste modo, o sistema pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} q = N_{11}p + N_{12}w \\ z = N_{21}p + N_{22}w \end{cases}$$

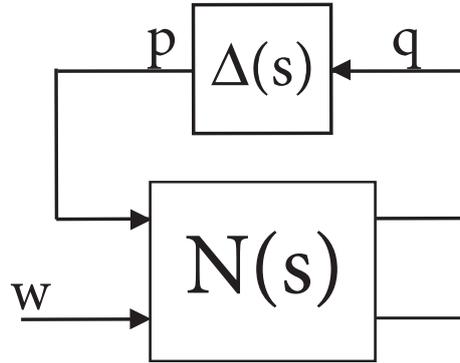


Figura 9.3: Diagrama de Blocos para Análise de Robustez

e como  $q = N_{11}\Delta q + N_{12}w$ , tem-se que  $(I - N_{11}\Delta)q = N_{12}w$  e  $q = (I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}w$ . Deste modo:

$$z = \underbrace{[N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12} + N_{22}]}_{\mathcal{F}_u(N, \Delta)} w$$

que é conhecida como *transformação linear fracionária superior*, e a matriz  $\Delta$  frequentemente tem a forma:

$$\Delta(j\omega) = \begin{bmatrix} \Delta_1(j\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta_2(j\omega) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta_p(j) \end{bmatrix}$$

onde  $\bar{\sigma}(\Delta_i(j\omega)) \leq 1$  para qualquer  $\omega$ , o que é equivalente a dizer que  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ . Diz-se então que esta matriz tem *estrutura*. Finalmente, as matrizes  $\Delta_i(j\omega)$  podem ser cheias ou diagonais da forma  $I\delta_i(j\omega)$ .

## 9.2 Valor Singular Estruturado e Análise de Robustez de Estabilidade

Podemos ver claramente da Fig. 9.3 que temos uma malha fechada na parte superior do sistema tal que a matriz de funções de transferência de malha aberta é  $N_{11}\Delta$ . Mais especificamente, trata-se de uma família de malhas fechadas, já que  $\Delta$  é uma matriz de incertezas. Entretanto, esta malha fechada é somente uma abstração matemática, porém podemos aplicar, por exemplo, o critério de Nyquist MIMO.

Deste modo, considerando que que temos estabilidade nominal, ou seja,  $N$ , e por conseguinte  $N_{11}$ , são estáveis, para se ter estabilidade robusta é necessário que para toda a família tal que  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$  o critério de estabilidade de Nyquist deve ser satisfeito para toda a família de malhas. É possível então enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 9.2.1.** *O sistema da Fig. 9.3 possui estabilidade robusta se e somente se  $\rho(N_{11}\Delta(j\omega)) < 1$  para qualquer  $\omega$  e  $\Delta$ , o que é equivalente a:*

$$\max_{\Delta} \rho(N_{11}\Delta(j\omega)) < 1$$

para qualquer  $\omega$ .

*Demonstração.* Se  $\max_{\Delta} \rho(N_{11}\Delta(j\omega)) < 1$ , como  $\rho$  é o máximo autovalor, tem-se então que:

$$\max_{\Delta} \max_i |\lambda_i(N_{11}\Delta)| < 1$$

o que implica que é verdade para todo  $|\lambda_i(N_{11}\Delta)| < 1$ . Como sabemos que  $\det(I - N_{11}\Delta) = \prod_i \lambda_i(I - N_{11}\Delta) = \prod_i (1 - \lambda_i(N_{11}\Delta))$ , então fica claro que  $\det(I - N_{11}\Delta) \neq 0$ . Como  $N_{11}$  não tem polos no semiplano direito (estabilidade nominal) assim como qualquer  $\Delta$ , tem-se que  $\det(I - N_{11}\Delta)$  não envolve origem em nenhum caso, o que significa que tem-se estabilidade robusta.

Supondo que há estabilidade robusta,  $\Delta$  é estável e nenhum pólo de  $\Delta N_{11}$  está semiplano direito (o que implica que  $P = 0$ ), tem-se que  $\det(I - N_{11}(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0$  não pode acontecer para nenhum  $\Delta$  ou  $\omega$ , ou seja,  $\det(I - N_{11}(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0$  para todo  $\Delta$  e todo  $\omega$ , o que é equivalente a  $\lambda_i(N_{11}\Delta) \neq 1$  para qualquer  $i$ , qualquer  $\Delta$  e qualquer  $\omega$ . Em termos de módulo, como  $|\lambda_i(N_{11}\Delta)| \neq 1$ , se houvesse para algum  $i$  e algum  $\Delta$ , um autovalor tal que  $|\lambda_i(N_{11}\Delta)| > 1$  teríamos:

$$\max_{\Delta} \max_i |\lambda_i(N_{11}\Delta)| > 1$$

Entretanto, por continuidade de  $\Delta$ , deveria haver um  $\Delta' = \epsilon\Delta$ , onde  $0 < \epsilon < 1$  para o qual  $\max_i |\lambda_i(N_{11}\Delta')| = 1$ , o que é absurdo. Logo, devemos ter sempre:

$$\max_{\Delta} \rho(N_{11}\Delta(j\omega)) < 1$$

o que prova o teorema. ■

Deste modo, pode-se chegar que:

**Lema 9.2.1.** *Para uma norma matricial (e em particular para qualquer norma induzida) vale que:*

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

*Demonstração.* Pode ser encontrada em [SP05] ■

**Lema 9.2.2.** *Seja  $\Delta$  o conjunto de todas as matrizes complexas tal que  $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ . Então a seguintes identidades valem:*

$$\max_{\Delta} \rho(N_{11}\Delta) = \max_{\Delta} \bar{\sigma}(N_{11}\Delta) = \max_{\Delta} \bar{\sigma}(\Delta)\bar{\sigma}(N_{11}) = \bar{\sigma}(N_{11})$$

*Demonstração.* Pode ser encontrada em [SP05] ■

**Teorema 9.2.2** (Estabilidade Robusta para  $\Delta$  cheia). *Se  $\Delta$  é uma família de matrizes que inclui as matrizes cheias, então a condição de robustez de estabilidade é:*

$$\bar{\sigma}(N_{11}(j\omega)) < 1$$

*Demonstração.* Pelo teorema 9.2.1, tem-se a condição de robustez de estabilidade geral. Pelo lema 9.2.2, prova-se o teorema. ■

### 9.2.1 Conceito de Valor Singular Estruturado

Para famílias mais restritas de matrizes  $\Delta$ , ou seja, que não contém as matrizes cheias e complexas, não há infelizmente um índice fácil de se calcular. Para tanto, é necessário introduzir um novo conceito:

**Definição 9.2.1** (Valor Singular Estruturado). *Data uma matriz  $M$  e uma família estruturada de matrizes  $\Delta$  tal que  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ , define-se o valor singular estruturado por:*

$$\mu_\Delta(M) = \frac{1}{\min_{\Delta} \{\bar{\sigma}(\Delta) | \det(I - M\Delta) = 0\}}$$

Ou seja, o que se busca é  $\Delta_*$  tal que tenha o menor  $\bar{\sigma}(\Delta_*)$  e tal que  $\det(I - M\Delta_*) = 0$ .

- Pode-se mostrar que  $\mu_\Delta(M)$  depende somente da estrutura de  $\Delta$ .
- No caso particular de  $\Delta$  cheia, temos que  $\mu_\Delta(M) = \bar{\sigma}(M)$ .

**Exemplo:** Dada a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

se supusermos que a matriz é cheia, tem-se que  $\mu_\Delta(M) = 3.1623$  e  $\bar{\sigma}(\Delta) = 0.3162$ , o que indica que se trata do menor valor para o qual ocorre a anulação determinante. Porém no caso de  $\Delta$  ser da forma:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

teremos que:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} 1 - 2\delta_1 & -2\delta_2 \\ \delta_1 & 1 + \delta_2 \end{bmatrix} = 1 - 2\delta_1 + \delta_2 = 0$$

Podemos então escrever:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & 2\delta_1 - 1 \end{bmatrix}$$

de modo que o máximo valor singular fica:

$$\bar{\sigma}(\Delta) = \sqrt{\lambda_{\max} \left\{ \begin{bmatrix} \delta_1^2 & 0 \\ 0 & (2\delta_1 - 1)^2 \end{bmatrix} \right\}}$$

Em função de  $\delta_1$ , o máximo autovalor pode ser  $\delta_1^2$  ou  $(2\delta_1 - 1)^2$ , como pode ser observado na Fig. 9.4. Como as duas curvas são positivas e convexas, o mínimo ocorre quando elas se igualam, ou seja  $\delta_1^2 = (2\delta_1 - 1)^2$ , o que ocorre em  $\delta_1 = 1/3$ , de modo que  $\bar{\sigma}(\Delta) = 1/3$  e  $\mu_\Delta(M) = 3$ . Usando-se a função `mussv` do MATLAB, que fornece limite superior e inferior, temos que o limite superior é 3 e o limite inferior é 2.9102. É também interessante notar que a função que está sendo minimizada tem no seu mínimo um ponto de não-diferenciabilidade, de modo que o mínimo não pode ser encontrado igualando-se a derivada da curva a zero (já que ela não existe naquele ponto).

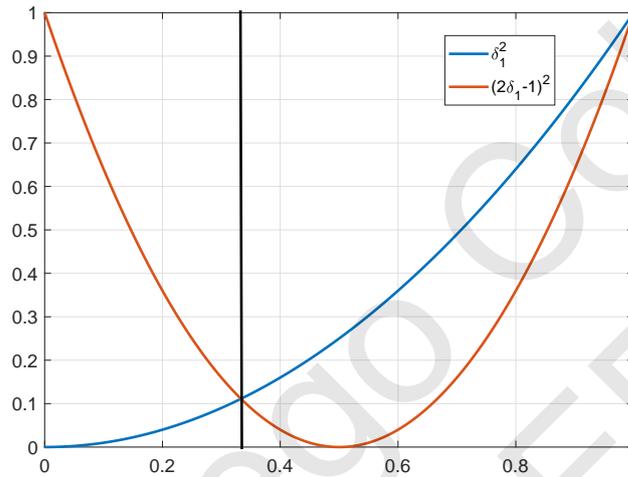


Figura 9.4: Minimização de  $\Delta$

### 9.2.2 Propriedades do Valor Singular Estruturado

Dada uma família de perturbações  $\Delta$ , tem-se:

- $\mu_\Delta(\alpha M) = |\alpha| \mu_\Delta(M)$ , para qualquer  $\alpha \in \mathbb{C}$ ;
- Para qualquer  $r \in \mathbb{R}$  e tal que  $r > 0$ , tem-se que  $r \mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(rM) = \mu_{r\Delta}(M)$ .

Podemos pensar no valor singular estruturado como uma função de conjunto, ou seja, uma função de  $\Delta$ , de modo que:

- Dados dois conjuntos de perturbações  $\Delta_1, \Delta_2$  tais que  $\Delta_1 \subset \Delta_2$ , tem-se que  $\mu_{\Delta_1}(M) \leq \mu_{\Delta_2}(M)$ ;

Como exemplo, podemos apresentar as três famílias  $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta_3$  tal que:

- $\Delta_1 = \{\delta I \in \mathbb{R}^{p \times q} \mid |\delta| < 1\}$ ;
- $\Delta_2 = \{\delta I \in \mathbb{C}^{p \times q} \mid |\delta| < 1\}$ ;
- $\Delta_3 = \{\Delta \in \mathbb{C}^{p \times q} \mid \|\Delta_c\|_\infty < 1\}$ ;

de modo que:

$$\mu_{\Delta_1}(M) \leq \mu_{\Delta_2}(M) \leq \mu_{\Delta_3}(M)$$

- Se  $\begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$  então:

$$\mu_{\Delta}(M) \geq \max\{\mu_{\Delta_1}(M_{11}), \mu_{\Delta_2}(M_{22})\}$$

- Se  $\Delta$  é complexa com  $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ , tem-se:

$$\mu_{\Delta}(M) = \max_{\Delta, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1} \rho(M\Delta)$$

e ainda  $\rho_{\mathbb{C}}(M) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M)$

- Estes limites interior e superior sempre podem ser usados como estimativas iniciais a serem refinadas
- Se  $\Delta = \delta I$  (onde  $\delta$  é complexo escalar) temos  $\mu(M) = \rho(M)$
- $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$  pode apresentar saltos em  $\omega$  quando há blocos reais em  $\Delta$ , de modo que não se trata de uma função contínua. Se não há blocos reais em  $\Delta$ , então  $\mu_{\Delta}(M)$  depende continuamente de  $M$  (não há saltos)
- Se  $U$  é uma matriz unitária com a mesma estrutura de  $\Delta$ , então  $\mu_{\Delta}(MU) = \mu_{\Delta}(M) = \mu_{\Delta}(UM)$
- Se  $D$  é uma matriz que comuta com  $\Delta$ , isto é  $\Delta D = D\Delta$ , então  $\mu_{\Delta}(DM) = \mu_{\Delta}(MD)$  e  $\mu_{\Delta}(DMD^{-1}) = \mu_{\Delta}(M)$
- Se  $\mathcal{U}_{\Delta}$  é o conjunto de todas as matrizes unitárias com a mesma estrutura que  $\Delta$ , então para  $\Delta$  complexa temos:

$$\mu_{\Delta}(M) = \max_{U \in \mathcal{U}_{\Delta}} \rho(MU)$$

e como se trata de um problema de otimização não convexo, não pode ser utilizada para calcular  $\mu_{\Delta}(M)$ , mas pode ser usada para dar um limite inferior melhor;

- Se  $\Delta_0 \in \frac{1}{\gamma} \Delta_c$  tal que  $I - M\Delta_0$  é singular, então  $\gamma \leq \mu_{\Delta_c}(M)$ . Este fato pode ser usado para melhorar o limite inferior (é usado pela função do MATLAB).
- Se  $\mathcal{D}_{\Delta}$  é o conjunto das matrizes que comutam com  $\Delta$ , então:

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$$

que é uma otimização convexa que, além disso, é um problema de desigualdades matriciais lineares (LMI), que dispõe de eficientes algoritmos de solução.

**Exemplo:** [[SP05]] Seja um sistema em malha fechada como apresentado na Fig. 9.5, onde a planta é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \begin{bmatrix} -87.8 & 1.4 \\ -108.2 & -1.4 \end{bmatrix}$$

e o controlador projetado é dado por:

$$K(s) = \frac{\tau s + 1}{s} \begin{bmatrix} -0.0015 & 0 \\ 0 & -0.075 \end{bmatrix}$$

a matriz de perturbações é  $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$  e  $W(s) = w_I(s)I$  tal que  $w_I(s) = \frac{s+0.2}{0.5s+1}$ ,  $\tau > 0$  e  $0 < |\delta_1|, |\delta_2| < 1$  complexos. Para se determinar a matriz  $N$  (planta estendida com controlador), tem-se que  $v = -w - Gp - Gu$ ,  $q = Wu$ ,  $z = -W_p(-w - Gp - u) = W_p w + W_p Gp + W_p u$

$$\begin{bmatrix} q \\ z \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W \\ W_p G & W_p & -W_p \\ -G & -I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Fazendo-se as substituições necessárias, chega-se a:

$$q = W[-K(I+GK)^{-1}Gp - K(I+GK)^{-1}w] = -W(I+KG)^{-1}KGp - W(I+KG)^{-1}Kw = -W \underbrace{KG(I+KG)^{-1}}_{T_I} p - W(I+KG)^{-1}Kw \quad (9.5)$$

de modo que para que se tenha robustez de estabilidade, é necessário e suficiente que:

$$\mu_\Delta(M(j\omega)) = \mu_\Delta(WT_I) = \mu_\Delta(w_I(j\omega)T_I(j\omega)) < 1$$

o que significa que:

$$\mu_\Delta(T_i(j\omega)) < \frac{1}{|w_I(j\omega)|} \quad (9.6)$$

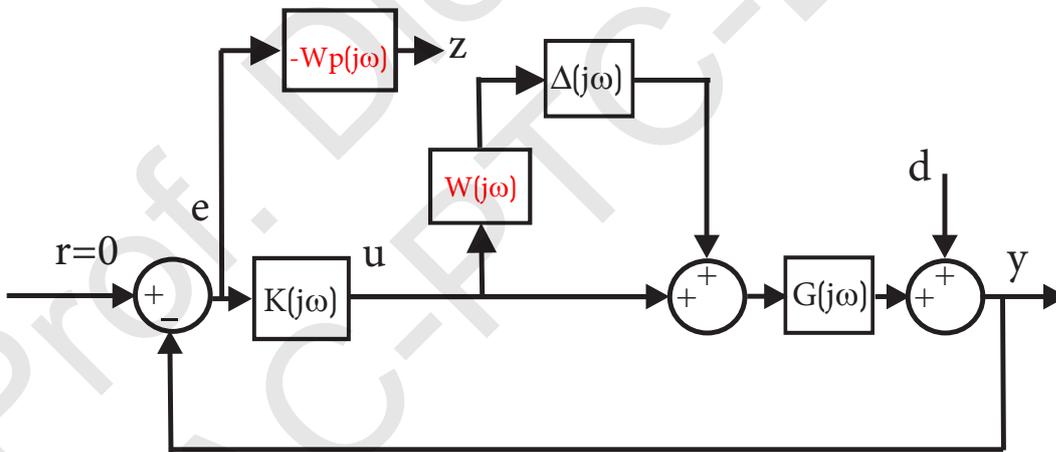


Figura 9.5: Planta estendida para Incluir Incertezas no Exemplo

Os valores singulares de malha aberta e de malha fechada (para a função  $T_I$ ) são mostrados na Fig. 9.6. Como já foi deduzido acima, caso a família de matrizes  $\Delta$  seja cheia, então  $\mu_\Delta(T_i(j\omega)) = \bar{\sigma}(T_i(j\omega))$ . Como neste caso a desigualdade (9.6) não é satisfeita, então o sistema não é robusto para essa classe de incertezas.

Para calcular  $\mu_\Delta(T_I(j\omega))$  para o caso da matriz  $\Delta$  diagonal complexa desejada, use-se a função **mussv** do MATLAB. Para este caso, deve-se passar a matriz  $T_I(j\omega)$  e a matriz **bloco** =  $[-1 \ 0; -1 \ 0]$ , e a função retorna os limites superior e inferior do valor singular estruturado. Na Fig. 9.6, tem-se também o inverso do módulo da função peso  $|w_I(j\omega)|$  e o limite superior do valor singular estruturado para  $T_I$  com a

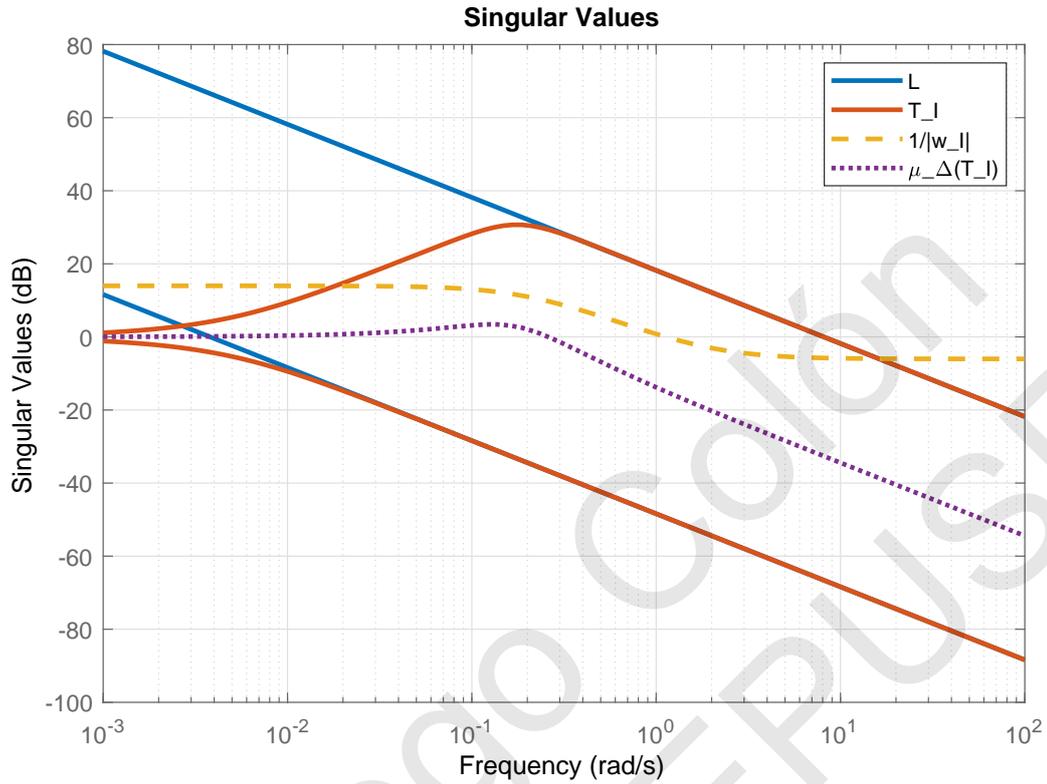


Figura 9.6: Valores singulares do Exemplo

matriz de incertezas diagonal complexa. Neste caso, vê-se claramente que a condição de robustez de estabilidade é satisfeita.

### 9.3 Análise de Robustez de Desempenho

Conforme foi visto anteriormente, o sistema em malha fechada (ou seja, já levando em conta o controlador projetado) com as incertezas incluídas, é representado na Fig. 9.3, e a relação entre entradas externas e saídas de desempenho é dada por:

$$z = \underbrace{[N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12} + N_{22}]}_{\mathcal{F}_u(N,\Delta)} w$$

Para que tenhamos robustez de desempenho, devemos ter:

$$\|\mathcal{F}_u(N, \Delta)\|_\infty < 1$$

para qualquer  $\Delta$ , o que é a mesma coisa que dizer que:

$$\|z\|_2 \leq \|\mathcal{F}_u(N, \Delta)\|_\infty \|w\|_2 < \|w\|_2$$

ou seja, o efeito nos erros de desempenho (em termos de energia) é diminuído. As piores entradas externas são aquelas da forma  $w = \Delta_p^* z$ , ou seja, que produzem uma

entrada externa que instabiliza o sistema em malha fechada. Para tanto, o sinal externo teria que de algum modo depender da saída de desempenho do sistema, que ficaria cada vez com maior amplitude, de maneira que a energia aumentasse sem parar. Isto significa que o sistema apresentado em Fig. 9.7 teria que ser instável.

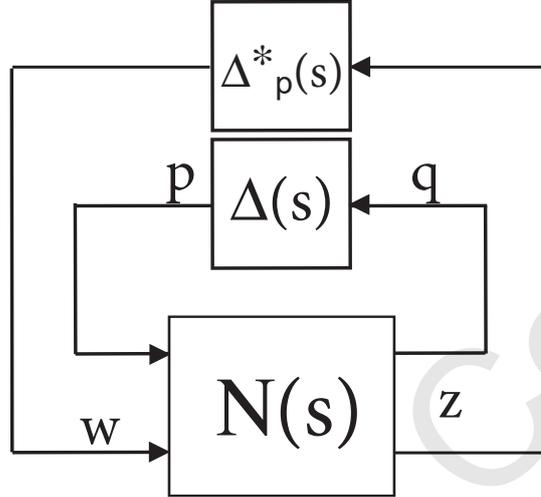


Figura 9.7: Diagrama de Blocos para Análise de Robustez de Desempenho

Para ser ter instabilidade, seria necessário que para algum  $\Delta_p^*$  e algum  $\omega$  tivéssemos:

$$\det(I - \mathcal{F}_u(N, \Delta)\Delta_p^*) = 0$$

De modo a não se ter instabilidade, devemos ter que

$$\det(I - \mathcal{F}_u(N, \Delta)\Delta_p) \neq 0 \quad (9.7)$$

para qualquer  $\Delta_p$  e qualquer  $\omega$ , o que obriga que  $\Delta_p$  seja complexa e cheia no caso mais geral. Como sabemos que (9.7) equivale a  $\mu_{\Delta_p}(\mathcal{F}_u) = \bar{\sigma}(\mathcal{F}_u) < 1$ , o que implica que  $\|\mathcal{F}_u\|_\infty < 1$ . Esta estão é a condição de robustez de desempenho.

Uma maneira mais interessante de fazer esta análise é através da definição da matriz:

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix}$$

onde agora se envolve a matriz  $N$  inteira. Deste modo, temos o seguinte teorema:

**Teorema 9.3.1.** *O sistema na Fig. 9.7 terá robustez de desempenho se e somente se:*

$$\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1$$

*Demonstração.* Uma ideia da prova na ida é: Sabemos que

$$\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1 \Leftrightarrow \det(I - N\hat{\Delta}) \neq 0$$

para qualquer  $\hat{\Delta}$  tal que  $\hat{\sigma}(\hat{\Delta}) \leq 1$ . Deste modo:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} I - N_{11}\Delta & -N_{12}\Delta_p \\ -N_{21}\Delta & I - N_{22}\Delta_p \end{bmatrix} \neq 0 \quad (9.8)$$

Pela fórmula de Schur, podemos escrever que este determinante é igual a:

$$\det(I - N_{11}\Delta) \det[I - N_{22}\Delta_p - N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}\Delta_p] = \det(I - N_{11}\Delta) \det(I - \mathcal{F}_u\Delta_p) \neq 0 \quad (9.9)$$

Deste modo, para que (9.8) seja  $\neq 0$ , é necessário e suficiente que:

- $\det(I - N_{11}\Delta) \neq 0 \Leftrightarrow \mu_\Delta(N_{11}) < 1$ , para qualquer  $\Delta$  (robustez de estabilidade) e;
- $\det(I - \mathcal{F}_u\Delta_p) \neq 0 \Leftrightarrow \mu_{\Delta_p}(\mathcal{F}_u) < 1$  (robustez de desempenho) ■

Deste modo, podemos unificar os critérios da seguinte forma:

1. **Estabilidade nominal:**  $N$  deve ser internamente estável
2. **Desempenho nominal:**  $\bar{\sigma}(N_{22}) < 1$  para qualquer  $\omega$ , além de estabilidade nominal;
3. **Robustez de estabilidade:**  $\mu_\Delta(N_{11}) < 1$ , além de estabilidade nominal;
4. **Robustez de desempenho:**  $\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1$  para qualquer  $\omega$ , além de estabilidade nominal

onde esta última condição já exige que haja robustez de estabilidade. Ainda  $\Delta$  pode sempre ter uma estrutura diagonal e  $\Delta_p$  sempre terá estrutura cheia e complexa.

**Exemplo:** Voltando ao último exemplo, supondo que  $z = W_p w$ , é possível mostrar que a matriz  $N$  é dada por:

$$N = \begin{bmatrix} -w_I T_I & -w_I K S \\ w_p S G & w_p S \end{bmatrix}$$

onde  $T_I = KG(I + KG)^{-1}$  e  $S = (I + GK)^{-1}$ . Sabemos que se  $U$  é uma matriz unitária, então  $\mu(N) = \mu(UN)$ , de modo que se aplicarmos:

$$U = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

em  $N$ , teremos:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} w_I T_I & w_I K S \\ w_p S G & w_p S \end{bmatrix}$$

Como neste exemplo já foi dado um controlador projetado  $K$ , não sabemos qual foi a matriz de peso de desempenho  $W_p$  que foi utilizada para o seu projeto. Desde modo, não podemos fazer análise da robustez de desempenho.

# Referências Bibliográficas

- [dC96] José Jaime da Cruz. *Controle Robusto Multivariável*. Editora da Universidade de São Paulo, 1996.
- [DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.
- [DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [FPC20] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. On the  $\mu$ -analysis and synthesis of mimo lurie-type systems with application in complex networks. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, June 2020.
- [GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.
- [Hes18] J.P. Hespanha. *Linear Systems Theory: Second Edition*. Princeton University Press, 2018.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.
- [Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.
- [Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.
- [PC19] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. An application of the lurie problem in hopfield neural networks. In Agenor de T. Fleury, Domingos A. Rade, and Paulo R. G. Kurka, editors, *Proceedings of DINAME 2017*, pages 371–382, Cham, 2019. Springer International Publishing.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.
- [SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaiier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.
- [ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.
- [ZDG95] Khemin Zhou, John C. Doyle, and Keith Glover. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1995.