PQI-5884 - Programação Inteira Mista Aplicada à Otimização de Processos
3º Período 2020

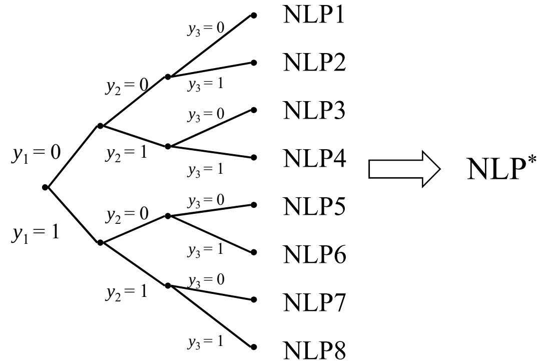
Data	Atividade	Conteúdo
17/09	Aula 1	Introdução, formulação, classes, representação
24/09	Aula 2	Condições de otimalidade
01/10	Aula 3	Condições KKT, multiplicadores
08/10	Aula 4	Otimização irrestrita
15/10	Aula 5	LP
22/10	Aula 6	NLP
29/10	Aula 7	MILP
05/10	Aula 8	MILP, problemas clássicos
12/11	Aula 9	MILP, problema de scheduling
19/11	**Aula 10**	**MINLP, problema de síntese**
26/11	-	-
03/12	Aula 11	Apresentações

MINLP - Programação Inteira Mista Não Linear

min	$z = f(\underline{x}) + \underline{c}^{T}.\underline{y}$	objetivo
sujeito a:	$\underline{h}(\underline{x}) = \underline{0}$	modelo
	$\underline{g}(\underline{x}) + \underline{B}.\underline{y} \le \underline{0}$	restrições $g \le 0$ e big-M
	$\underline{A}.\underline{y} =, \le \underline{a}$	restrições lógicas e de seleção
	$\underline{x} \in \Re^{n}$	
	$\underline{y} \in \{0,1\}^{m}$	

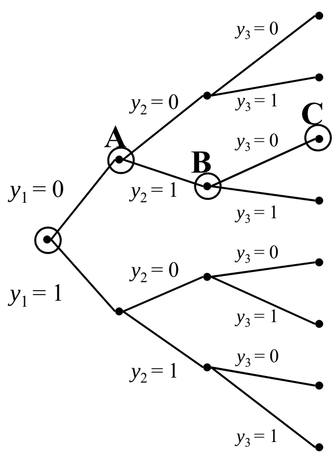
Técnicas de solução MINLP

ENUMERAÇÃO EXAUSTIVA



Para funcionar: otimização global nos NLPs!

BRANCH-AND-BOUND

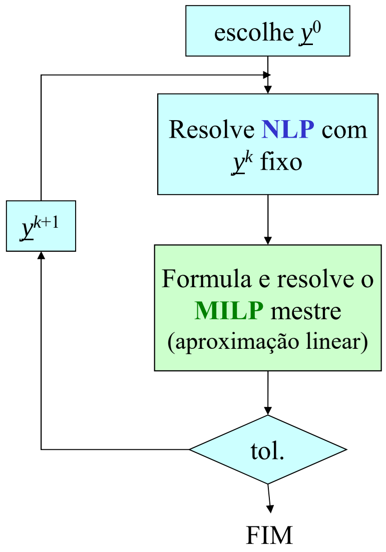


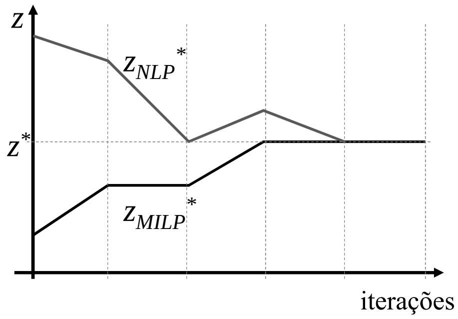
Resolução sequencial de problemas relaxados como NLPs com especificação de variáveis binárias

Para funcionar: otimização global nos NLPs!

MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO (MINLP → NLP + MILP)

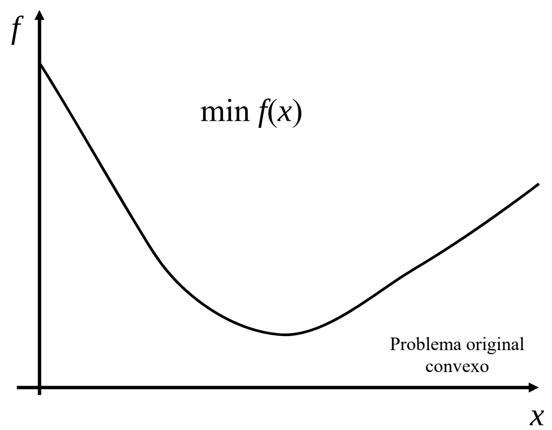
- GBD - Decomposição de Benders Generalizada (Geoffrion, 1972)
- AO - Aproximação externa (Duran e Grossmann, 1986)



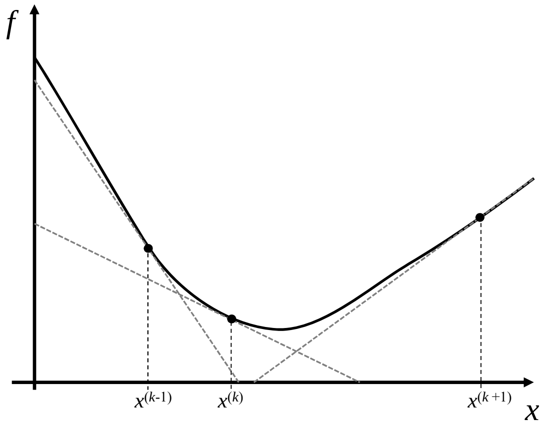


Para funcionar:
problema convexo!

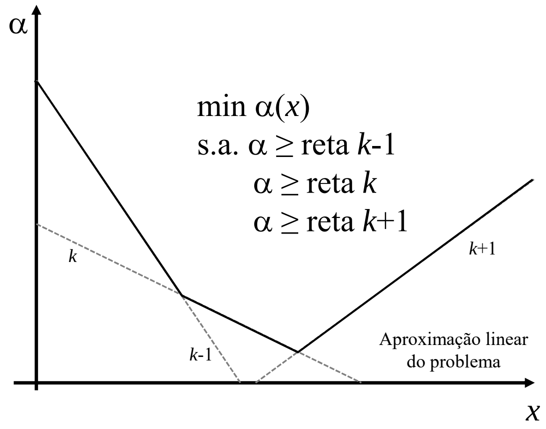
Construção do MILP mestre
- aproximação linear da função objetivo



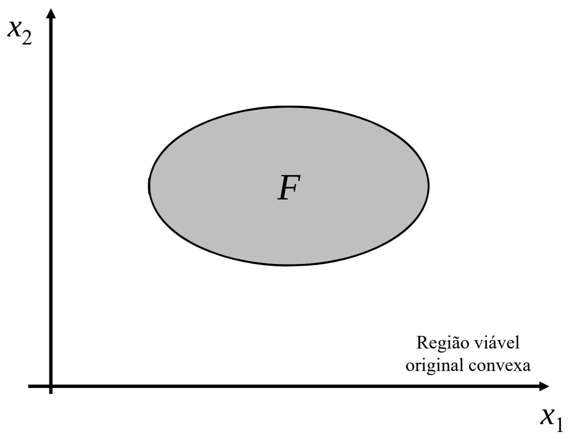
Construção do MILP mestre
- aproximação linear da função objetivo



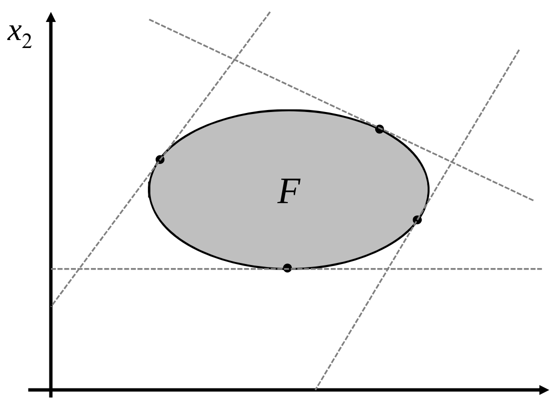
Construção do MILP mestre
- aproximação linear da função objetivo



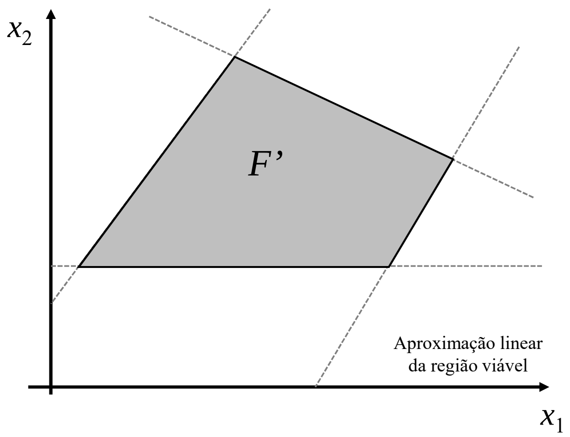
Construção do MILP mestre
- aproximação linear da região viável



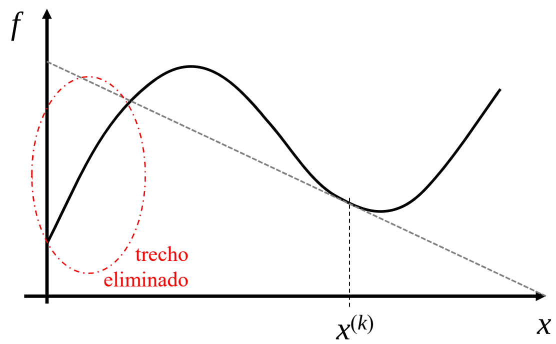
Construção do MILP mestre
- aproximação linear da região viável



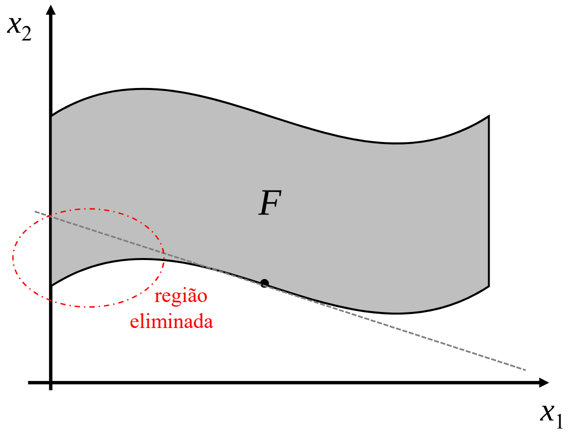
Construção do MILP mestre
- aproximação linear da região viável



Problema: função objetivo não convexa



Problema: região viável não convexa



Técnicas de convexificação de problemas NLP

Convexificação de posinômios

$$f(\underline{x}) = \sum_j c_j . \prod_i x_i^{\alpha_i} \qquad \text{com } c_j > 0$$

substituição de variáveis

$x_i \quad \rightarrow \quad \exp(u_i)$

$$f(\underline{x}) = \sum_j c_j . \exp\left(\sum_i \alpha_i . u_i\right) \qquad \text{função convexa!}$$

Exemplo:

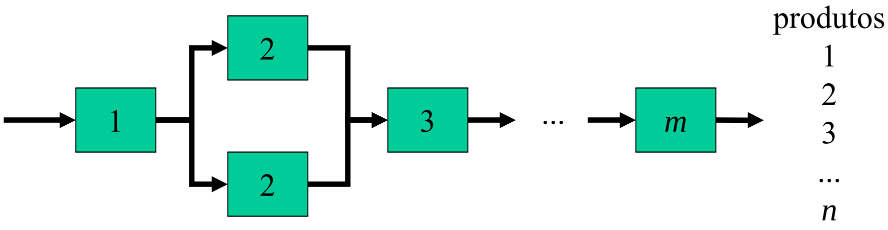
$$f(\underline{x}) = x_1.x_2 + 2.\frac{\sqrt{x_1}}{x_2} + 1$$

Substituindo x_1 por $\exp(u_1)$ e x_2 por $\exp(u_2)$:

$$f(\underline{u}) = \exp(u_1 + u_2) + 2.\exp(0{,}5.u_1 - u_2) + 1$$

CASO MINLP: PROJETO ÓTIMO DE UMA PLANTA EM BATELADA

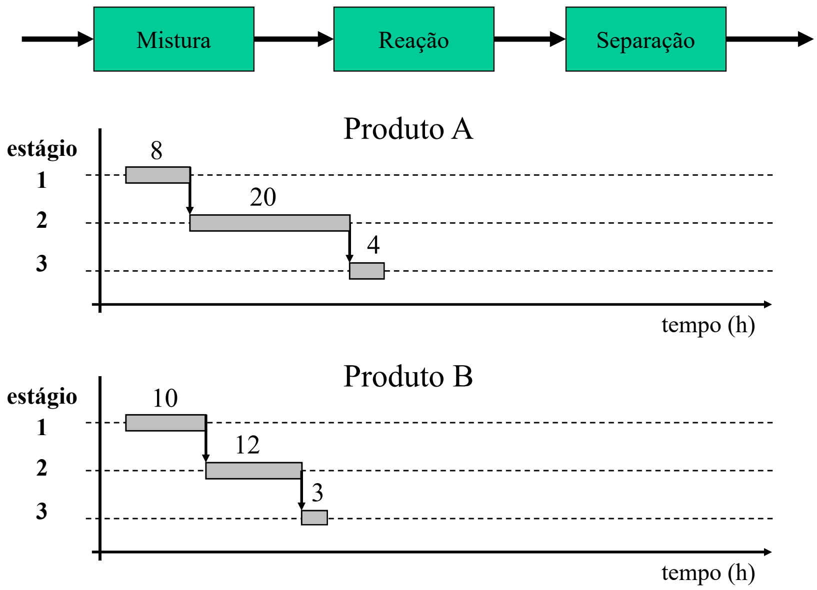
Biegler, Grossmann, Westerberg (1997)



Produtos: $i = 1, 2\ldots n$
Estágios: $j = 1, 2, \ldots m$
t_{ij} = tempo de processamento de i em j (h)

- Campanha simples
- *flowshop*

16

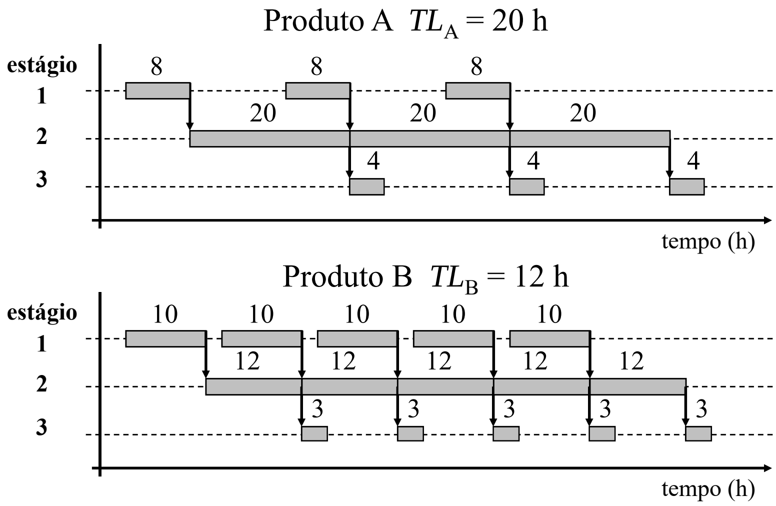


Tempo de transferência zero
Campanha simples por produto

17

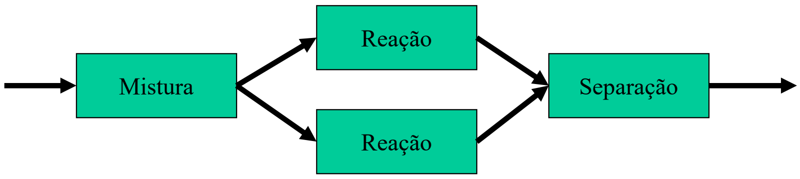
Tempo de ciclo do produto (TL)

$$TL_i = \max_{j=1\ldots m}\{t_{ij}\}$$

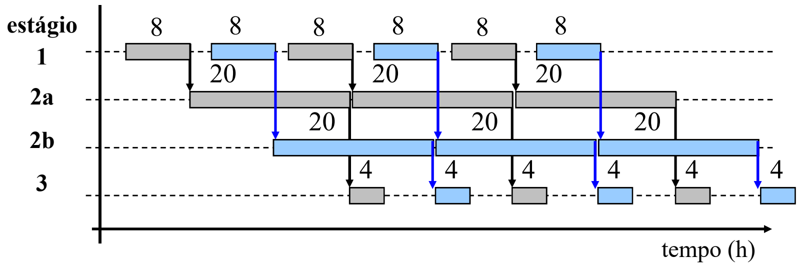


18

Unidades em paralelo no estágio: N_j



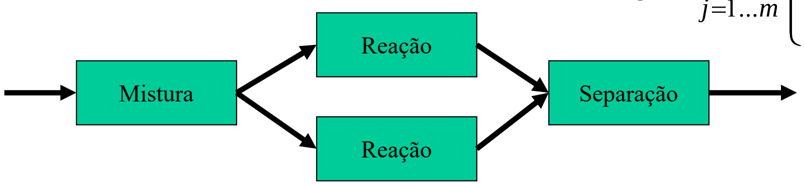
Produto A $TL_A = 10$ h



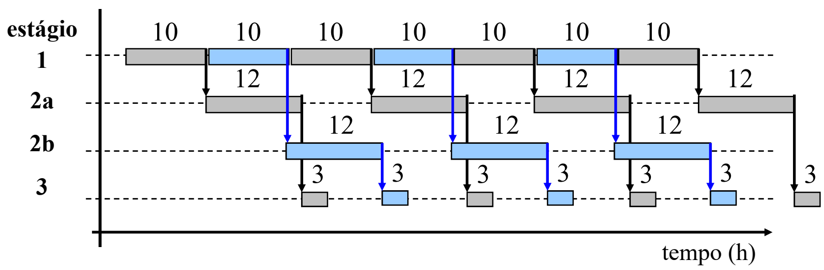
19

Unidades em paralelo no estágio: N_j

$$TL_i = \max_{j=1\ldots m} \left\{ \frac{t_{ij}}{N_j} \right\}$$

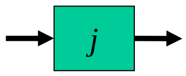


Produto B $TL_B = 10$ h



20

Capacidade das unidades



... i

Variáveis:
V_j = volume de uma unidade no estágio j (L_j)
B_i = tamanho de uma batelada do produto i (kg_i)

Parâmetro:

S_{ij} = fator de tamanho para produto i no estágio j (L_j/kg_i)

Restrição: $V_j \geq S_{ij} \cdot B_i \quad \forall\, i,j$ (2)

Limites: $V_j^{LO} \leq V_j \leq V_j^{UP} \quad \forall\, j$ (3)

21

Restrições no horizonte de tempo

- Produzir as demandas Q_i (i = 1, ... N) dentro do horizonte H

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{B_i} \cdot TL_i \leq H \qquad (5)$$

NB_i número de bateladas de i

- Modelagem do tempo de ciclo do produto i

$$TL_i \geq \frac{t_{ij}}{N_j} \qquad \forall\, i, j \qquad (6)$$

22

<u>Unidades em paralelo no estágio</u>: N_j $j = 1, \ldots M$

$N_j \in \aleph$ $0 \leq N_j \leq N_j^{UP}$

Problema não linear em N_j

Modelagem:

$N_j \in \Re$

$$N_j = \sum_{k=1}^{N_j^{UP}} y_{jk} \cdot k \qquad (7a)$$

$$\sum_{k=1}^{N_j^{UP}} y_{jk} = 1 \qquad (7b)$$

$y_{jk} \in \{0, 1\}$

23

<u>Limites matemáticos para TL_i e B_i</u>

$TL_i^{LO} \leq TL_i \leq TL_i^{UP}$ $i = 1, \ldots N$ (8a)

$B_i^{LO} \leq B_i \leq B_i^{UP}$ $i = 1, \ldots N$ (9a)

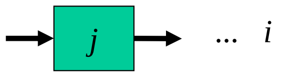
$TL_i^{LO} = \max(j)\{\, t_{ij}/N_j^{UP} \}$ $B_i^{LO} = Q_i.(TL_i^{LO}/H)$

$TL_i^{UP} = \max(j)\{\, t_{ij} \,\}$ $B_i^{UP} = \min(j)\{\, V_j^{UP}/S_{ij} \,\}$

obs: arredondar limites superiores (*UP*) para cima e
inferiores (*LO*) para baixo para evitar erros numéricos.

24

Custo das unidades (função objetivo)



$$C = \sum_{j=1}^{M} N_j \cdot \alpha_j \cdot V_j^{\beta_j} \qquad (11)$$

Parâmetros de custo: α_j , β_j

Formulação MINLP (não convexo)

min $\quad C = \sum_{j=1}^{M} N_j \cdot \alpha_j \cdot V_j^{\beta_j}$

s.a.:

$$V_j \geq S_{ij} \cdot B_i \qquad i = 1, \ldots N \;;\; j = 1, \ldots M$$

$$N_j \cdot TL_i \geq t_{ij} \qquad i = 1, \ldots N \;;\; j = 1, \ldots M$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{B_i} \cdot TL_i \leq H$$

$$N_j = \sum_{k=1}^{N_j^{UP}} y_{jk} \cdot k$$

$$\sum_{k=1}^{N_j^{UP}} y_{jk} = 1$$

$$y_{jk} \in \{ 0 , 1 \}$$

$V_j^{LO} \leq V_j \leq V_j^{UP}$	$j = 1, \ldots M$
$TL_i^{LO} \leq TL_i \leq TL_i^{UP}$	$i = 1, \ldots N$
$B_i^{LO} \leq B_i \leq B_i^{UP}$	$i = 1, \ldots N$

Variáveis: V_j, N_j, B_i, TL_i, y_{jk}

Mudança de variáveis para tornar o problema convexo

Variáveis:

V_j	por	$\exp(v_j)$
N_j	por	$\exp(n_j)$
B_i	por	$\exp(b_i)$
TL_i	por	$\exp(tl_i)$

27

Formulação MINLP convexa

$$\min \quad C = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \cdot \exp\left(n_j + \beta_j \cdot v_j\right) \qquad \text{convexa!}$$

s.a.:

$$v_j \geq (\ln S_{ij}) + b_i \qquad i = 1, \ldots N \;;\; j = 1, \ldots M$$

$$n_j + tl_i \geq (\ln t_{ij}) \qquad i = 1, \ldots N \;; j = 1, \ldots M \qquad \text{linear!}$$

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i \cdot \exp\left(tl_i - b_i\right) \leq H \qquad \text{convexa!}$$

$$n_j = \sum_{k=1}^{N_j^U} y_{jk} \cdot \ln k \qquad j = 1, \ldots M$$

$$\sum_{k=1}^{N_j^U} y_{jk} = 1 \qquad j = 1, \ldots M$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\}$$

$$(\ln V_j^{LO}) \leq v_j \leq (\ln V_j^{UP}) \; \forall j$$

$$(\ln TL_i^{LO}) \leq tl_i \leq (\ln TL_i^{UP}) \; \forall i$$

$$(\ln B_i^{LO}) \leq b_i \leq (\ln B_i^{UP}) \; \forall i$$

28

Variáveis: v_j, n_j, b_i, tl_i, y_{jk}

Limites para TL_i e B_i

$TL_i^{LO} \leq TL_i \leq TL_i^{UP}$ $\quad i = 1, \ldots N$

$B_i^{LO} \leq B_i \leq B_i^{UP}$ $\quad i = 1, \ldots N$

Limites para tl_i e b_i

$(\ln TL_i^{LO}) \leq tl_i \leq (\ln TL_i^{UP})$ $\quad i = 1, \ldots N$

$(\ln B_i^{LO}) \leq b_i \leq (\ln B_i^{UP})$ $\quad i = 1, \ldots N$

$TL_i^{LO} = \max(j)\{\ t_{ij}/N_j^{UP}\ \}$	$B_i^{LO} = Q_i.(TL_i^{LO}/H)$
$TL_i^{UP} = \max(j)\{\ t_{ij}\ \}$	$B_i^{UP} = \min(j)\{\ V_j^{UP}/S_{ij}\ \}$

obs: arredondar limites superiores (*UP*) para cima e inferiores (*LO*) para baixo para evitar erros numéricos.

29

<u>Modificação</u>: unidades podem assumir apenas capacidades discretas

Capacidade como variável contínua:

$V_j^L \leq V_j \leq V_j^U$ $\quad j = 1, \ldots M$

$V_j \leq \in \Re$

Capacidade discreta: $V_j \in \{\ dV_{j1}, dV_{j2}, \ldots dV_{j,NSj}\ \}$

$$V_j = \sum_{s=1}^{NS_j} dV_{js}.z_{js} \qquad j = 1, \ldots M \qquad \longrightarrow \qquad v_j = \sum_{s=1}^{NS_j} \ln\left(dV_{js}\right).z_{js}$$

$$\sum_{s=1}^{NS_j} z_{js} = 1 \qquad j = 1, \ldots M$$

$$z_{js} \in \{\ 0\ ,\ 1\ \} \qquad j = 1, \ldots M \quad s = 1, \ldots NS_j$$

30