ANOVA
Modelos de Efeitos Fixos e Aleatórios

Modelos mais Gerais

(Neter et al. 2005; Oehlert, 2010)

Diferentes estruturas para os componente "FIXOS" e "ALEATÓRIOS" do modelo adotado para Y:

$$\mathbf{Y = \boxed{E[Y|X]} + \boxed{[\,Y - E(Y|X)]}}$$

componente fixo do modelo

componente aleatório do modelo

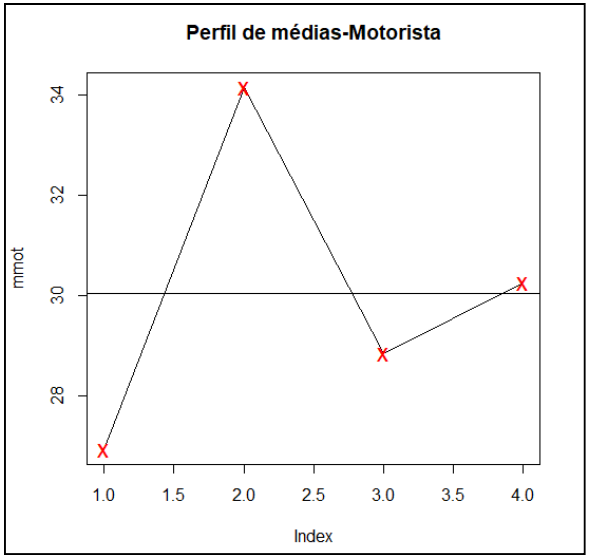
Modelo com Dois Fatores Aleatórios

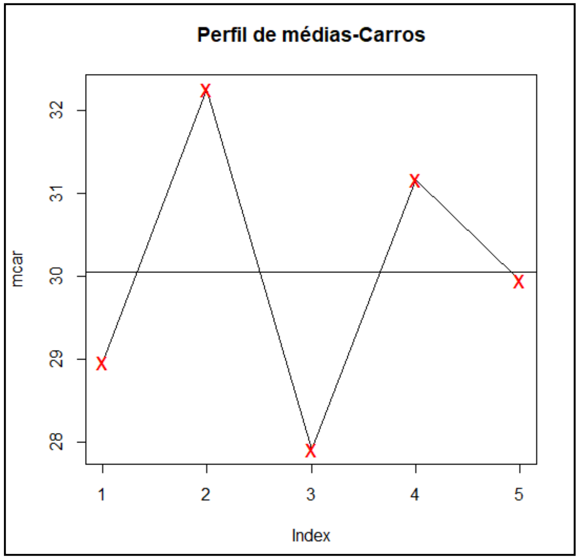
Consumo de Gasolina de acordo com carros e motoristas amostrados aleatoriamente de uma indústria automobilística

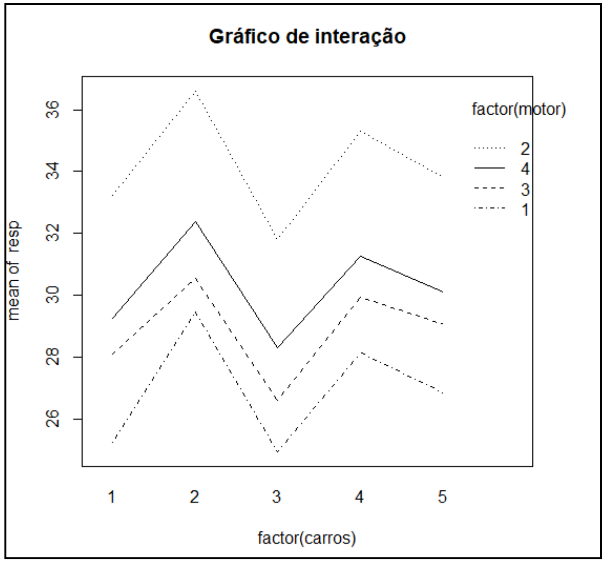
Fator B: Motoristas	Fator A: Carros				
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$i = 1$	25.3	28.9	24.8	28.4	27.1
	25.2	30.0	25.1	27.9	26.6
$i = 2$	33.6	36.7	31.7	35.6	33.7
	32.9	36.5	31.9	35.0	33.9
$i = 3$	27.7	30.7	26.9	29.7	29.2
	28.5	30.4	26.3	30.2	28.9
$i = 4$	29.2	32.4	27.7	31.8	30.3
	29.3	32.4	28.9	30.7	29.9

Os fatores Carros e Motoristas são aleatórios.
A resposta sob estudo é o consumo de combustível.

Modelo com Dois Fatores Aleatórios







Componentes da variabilidade de Y devido ao efeito (aleatório) principal de cada fator bem como de sua interação.

Modelo com Dois Fatores Aleatórios

Componente fixo

Componente aleatório

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \boxed{\mu} + \boxed{\tau_j + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}}; \quad i = 1,\ldots,n_{jk};\ j = 1,\ldots,a;\ k = 1,\ldots,b$$

$$\tau_j \sim N\left(0\,;\sigma_A^2\right); \quad \beta_k \sim N\left(0\,;\sigma_B^2\right); \quad \gamma_{jk} \sim N\left(0\,;\sigma_{AB}^2\right);$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right); \quad \tau_j \perp \beta_k \perp \gamma_{jk} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu\,;\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$Cov\left(y_{ijk}; y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2 & i = i';\ j = j';\ k = k' \\ \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 & i \neq i';\ j = j';\ k = k' \\ \sigma_A^2 & i \neq i';\ j = j';\ k \neq k' \\ \sigma_B^2 & i \neq i';\ j \neq j';\ k = k' \\ 0 & i \neq i';\ j \neq j';\ k \neq k' \end{cases}$$

Modelos Lineares de Efeitos Aleatórios

ANOVA para Delineamentos com Dois Fatores, A e B, Aleatórios

FV	#g.l.	E(QM)
A	a - 1	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2 + rb\sigma_A^2$
B	b - 1	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2 + ra\sigma_B^2$
AB	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2$
Resíduo	n-ab=ab$(r-1)$	σ_e^2

r: réplicas n=abr

Neter et al., 2005

Estrutura Fatorial dos efeitos aleatórios

$$H_0: \sigma_{AB}^2 = 0 \Rightarrow F_{AB} = \frac{QM(AB)}{QM\,\mathrm{Re}s} \sim F_{(a-1)(b-1),ab(r-1)}$$

$$H_0: \sigma_A^2 = 0 \Rightarrow F_A = \frac{QMA}{QM(AB)} \sim F_{(a-1),(a-1)(b-1)}$$

$$H_0: \sigma_B^2 = 0 \Rightarrow F_B = \frac{QMB}{QM(AB)} \sim F_{(b-1),(a-1)(b-1)}$$

Tabela de ANOVA equivalente ao modelo de efeitos Fixos, exceto o E(QM).
Não há uma ordem para a realização dos testes dos components de variância!

Modelo com Dois Fatores Aleatórios
Estimadores dos Componentes de Variância

$$\sigma_A^2 = \frac{E(QMA) - E(QMAB)}{rb} \Rightarrow \hat{\sigma}_A^2 = \frac{QMA - QMAB}{rb}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{E(QMB) - E(QMAB)}{ra} \Rightarrow \hat{\sigma}_B^2 = \frac{QMB - QMAB}{ra}$$

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{E(QMAB) - E(QM\,\mathrm{Re}\,s)}{r} \Rightarrow \hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{QMAB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{r}$$

$$\sigma_e^2 = E(QM\,\mathrm{Re}\,s) \Rightarrow \hat{\sigma}_e^2 = QM\,\mathrm{Re}\,s$$

Intervalos de Confiança aproximados para Componentes de Variância em modelos balanceados podem ser obtidos por meio do procedimento de Satterthwaite que identifica os estimadores desses CV como combinações lineares de Quadrados Médios.

Modelo com 2 Fatores Aleatórios
Estimador da Média Geral

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...}$$

$$Var\left(\hat{\mu}\right) = Var\left(\frac{\sum_{ijk} y_{ijk}}{rab}\right) = \frac{rb\sigma_A^2 + ra\sigma_B^2 + r\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}{rab}$$

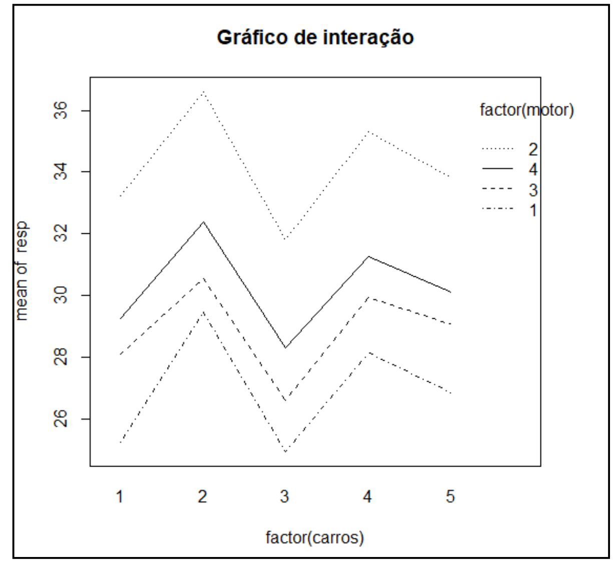
$$= \frac{E\left(QMA\right) + E\left(QMB\right) - E\left(QMAB\right)}{rab}$$

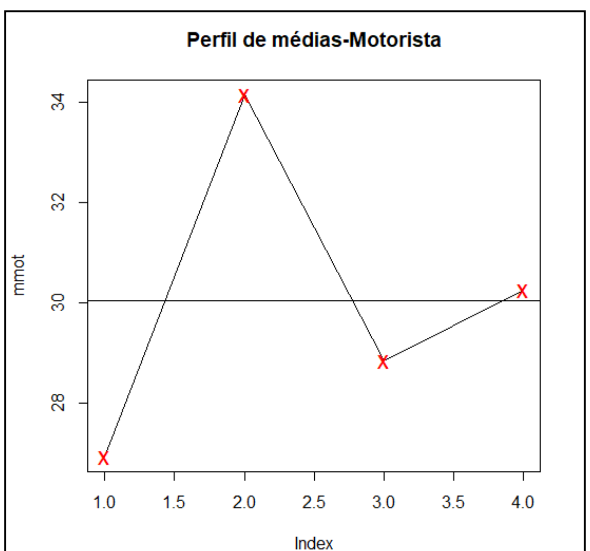
$$\hat{V}ar\left(\hat{\mu}\right) == \frac{QMA + QMB - QMAB}{rab}$$

Modelo com Dois Fatores Aleatórios

Fator B: Motoristas	Fator A: Carros				
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$i=1$	25.3	28.9	24.8	28.4	27.1
	25.2	30.0	25.1	27.9	26.6
$i=2$	33.6	36.7	31.7	35.6	33.7
	32.9	36.5	31.9	35.0	33.9
$i=3$	27.7	30.7	26.9	29.7	29.2
	28.5	30.4	26.3	30.2	28.9
$i=4$	29.2	32.4	27.7	31.8	30.3
	29.3	32.4	28.9	30.7	29.9

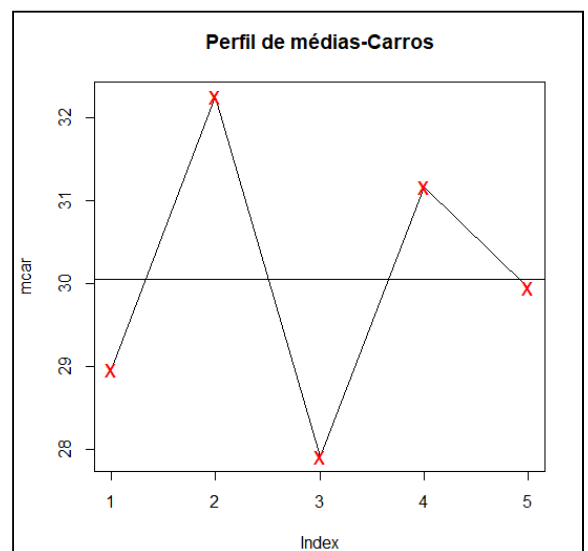
$\sigma^2_{AB} \Leftarrow$





$\Rightarrow \sigma^2_B$

$\sigma^2_A \Leftarrow$



Modelo com Dois Fatores Aleatórios

Fator B: Motoristas	Fator A: Carros				
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$i=1$	25.3 25.2	28.9 30.0	24.8 25.1	28.4 27.9	27.1 26.6
$i=2$	33.6 32.9	36.7 36.5	31.7 31.9	35.6 35.0	33.7 33.9
$i=3$	27.7 28.5	30.7 30.4	26.9 26.3	29.7 30.2	29.2 28.9
$i=4$	29.2 29.3	32.4 32.4	27.7 28.9	31.8 30.7	30.3 29.9

r=2, a=5, b=4
n=40

Tabela de ANOVA: Modelo com 2 Fatores Aleatórios

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value
Carros (A: aleatório0	4	94.713	23.678	23.678/0.204=116.07
Motorista (B: aleatório)	3	280.285	93.428	93.428/0.204=457.98
Carros*Motorista	12	2.446	0.204	0.204/0.176=1.159
Residuals	20	3.515	0.176	

Significância dos Componentes de variância (CV)

CV	Estimativa	vapor-p	valor-p ajustado.fdr
Fator A	2.934	1.745695e-09	5.237085e-09*
Fator B	9.322	1.226574e-12	3.679723e-12*
Fator AB	0.014	3.714839e-01	1.000000e+00

Rejeitar $\sigma_A^2 = 0$
Rejeitar $\sigma_B^2 = 0$
Não Rejeitar $\sigma_{AB}^2 = 0$

$\hat{\mu} = 30.05 \qquad dp\left(\hat{\mu}\right) = 1.7096$

Modelo com Três Fatores Aleatórios

Quadrado Médio Esperado

Source	EMS
A	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nc\sigma^2_{\alpha\beta} + nb\sigma^2_{\alpha\gamma} + nbc\sigma^2_{\alpha}$
B	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nc\sigma^2_{\alpha\beta} + na\sigma^2_{\beta\gamma} + nac\sigma^2_{\beta}$
C	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nb\sigma^2_{\alpha\gamma} + na\sigma^2_{\beta\gamma} + nab\sigma^2_{\gamma}$
AB	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nc\sigma^2_{\alpha\beta}$
AC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nb\sigma^2_{\alpha\gamma}$
BC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + na\sigma^2_{\beta\gamma}$
ABC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
Error	σ^2

Há Testes F exatos para testar os efeitos aleatórios ABC, AB, AC e BC. MAS não há testes exatos para testar os Efeitos Principais A, B e C. Testes aproximados precisam ser obtidos no caso de modelos com 3 ou mais fatores aletórios.

Modelo Misto: Um Fator Fixo e Um Fator Aleatório

A eficiência de três Métodos de Ensino (I, II e III) foi avaliada por meio do desempenho do aluno. Cinco instrutores habilitados a conduzir tais Métodos foram aleatoriamente escolhidos de um cadastro para fazerem parte do estudo. Quinze grupos de quatro alunos considerados homogêneos segundo o conhecimento do assunto foram então

Método de Ensino	**I**				**II**				**III**			
Instr. 1	65	68	56	45	74	69	52	73	69	63	81	67
Instr. 2	58	62	65	56	81	76	56	78	83	70	72	79
Instr. 3	63	75	58	54	76	80	62	83	74	72	73	73
Instr. 4	57	64	70	48	80	78	58	75	78	68	76	77
Instr. 5	66	70	64	60	68	73	51	76	80	75	70	71

Considere a análise destes dados: há diferença no desempenho esperados dos alunos de acordo com os três Métodos de Ensino?
Método de Ensino deve ser modelado como Fator Fixo ou Alea’torio? E Instrutor?

Proponha outras situações experimentais em que um modelo misto desse tipo seria útil.

Modelo Misto

Componente fixo

Componente aleatório

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \boxed{\mu + \tau_j} + \boxed{\beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk};} \quad i = 1,\dots,n_{jk};\ j = 1,\dots,a;\ k = 1,\dots,b$$

$$\sum_{j=1}^{a} \tau_j = 0; \qquad \beta_k \sim N\left(0\,;\sigma_B^2\right);$$

Formulação restrita do modelo misto

$$\gamma_{jk} \sim N\left(0\,;\frac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2\right); \quad \boxed{\sum_{j=1}^{a} \gamma_{jk} = 0\,;} \quad Cov\left(\gamma_{jk};\gamma_{j'k}\right) = -\frac{1}{a}\sigma_{AB}^2 \qquad j \neq j'$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right); \quad \beta_k \perp \gamma_{jk} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu + \tau_i\,;\sigma_B^2 + \frac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$Cov\left(y_{ijk};y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_B^2 + \dfrac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2 & i = i' \\ \sigma_B^2 + \dfrac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2 & i \neq i', j = j'; k = k' \\ \sigma_B^2 - \dfrac{1}{a}\sigma_{AB}^2 & i \neq i', j \neq j'; k = k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases}$$

Modelos Lineares Mistos

Delineamentos com Dois Fatores Cruzados AxB: A de Efeito Fixo e B de Efeito Aleatório

FV	#g.l.	E(QM)
A	$a-1$	$\sigma_e^2 + rb\dfrac{\sum_j \tau_j^2}{a-1} + r\sigma_{AB}^2$
B	$b-1$	$\sigma_e^2 + ra\sigma_B^2$
AB	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2$
Resíduo	n-ab=ab$(r-1)$	σ_e^2

Neter et al., 2005

SQ, QM e número de g.l. são calculados como no caso de um modelo ANOVA de efeitos fixos. O denominador da estatística F mudará de acordo com o valor esperado do QM, isto é, E(QM).

Modelo Linear Misto

```
Tabela de ANOVA - Modelo Misto
                              Df   Sum Sq Mean Sq   F value
Método (A:Fixo)                2 1695.63  847.82   FA: 847.82/27.75=30.55 <0.001*
Instrutor (B:Aleatório)        4  190.57   47.64   FB:  47.64/66.50= 0.72 0.5851
Método*Instrutor(AB:Aleat)  8  222.03   27.75   FAB: 27.75/66.50=0.42  0.9045
Residuals                     45 2992.50   66.50
```

$$H_{0AB}:\sigma^2_{AB}=0 \quad \Rightarrow F_{AB}=\frac{QM(AB)}{QM\,\mathrm{Re}s}\sim F_{8,45}$$

Método de Ensino e Instrutor não interagem

$$H_{0B}:\sigma^2_{B}=0 \quad \Rightarrow F_{B}=\frac{QM(B)}{QM\,\mathrm{Re}s}\sim F_{4,45}$$

A variabilidade entre instrutores não é significante

$$H_{0A}:\tau_j=0 \quad \Rightarrow F_{A}=\frac{QM(A)}{QM(AB)}\sim F_{2,4}$$

Há (pelo menos uma) diferença significante entre o desempenho esperado dos alunos de acordo com Método de Ensino

Modelo Linear Misto

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \boxed{\mu + \tau_j} + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}; \quad i = 1,\ldots,r; j = 1,\ldots,a; k = 1,\ldots,b$$

$$\mu_j \qquad \sum_{j=1}^{a} \tau_j = 0$$

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{\ldots} \qquad \hat{\tau}_j = \hat{\mu}_j - \hat{\mu} = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{\ldots}$$

$$Var\left(\hat{\tau}_j\right) = \frac{\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2}{br} = \frac{E\left(QMAB\right)}{br} \Rightarrow \hat{V}ar\left(\hat{\tau}_j\right) = \frac{QMAB}{br}$$

$$H_0 : \tau_j = 0; \qquad \frac{\hat{\tau}_j}{\sqrt{\hat{V}ar\left(\hat{\tau}_j\right)}} \sim t_{(a-1)(b-1)}$$

Modelo Linear Misto

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \mu + \tau_j + \boxed{\beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}};$$

$$\sigma_B^2; \quad \sigma_{AB}^2; \quad \sigma_e^2$$

$$\sigma_B^2 = \frac{E(QMB) - E(QM\,\text{Res})}{ra} \Rightarrow \hat{\sigma}_B^2 = \frac{QMB - QM\,\text{Res}}{ra}$$

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{E(QMAB) - E(QM\,\text{Res})}{r} \Rightarrow \hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{QMAB - QM\,\text{Res}}{r}$$

$$\sigma_e^2 = E(QM\,\text{Res}) \Rightarrow \hat{\sigma}_e^2 = QM\,\text{Res}$$

Intervalos de Confiança aproximados para Componentes de Variância em modelos balanceados podem ser obtidos por meio do procedimento de Satterthwaite que identifica os estimadores desses CV como combinações lineares de Quadrados Médios.

Modelo Linear Misto

Tabela de ANOVA - Modelo Misto

	Df	Sum Sq	Mean Sq	**F value**	
Método (A:Fixo)	2	1695.63	847.82	FA: 847.82/27.75=30.55	<0.001*
Instrutor (B:Aleatório)	4	190.57	47.64	FB: 47.64/66.50= 0.72	0.5851
Método*Instrutor(AB:Aleat)	8	222.03	27.75	FAB: 27.75/66.50=0.42	0.9045
Residuals	45	2992.50	66.50		

Médias por Método de Ensino

1	2	3	
61.20	70.95	73.55	68.57

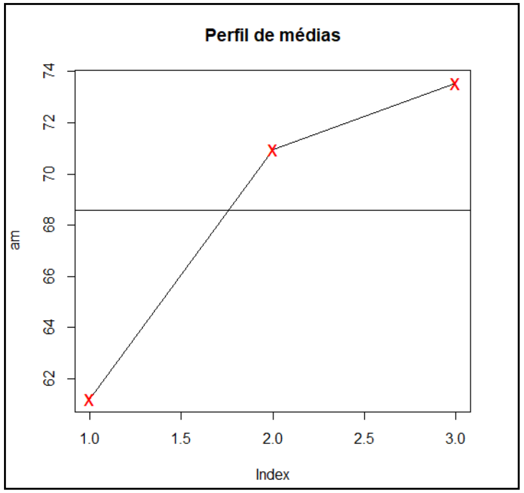
$$\hat{\tau}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$$

$$\hat{\tau}_1 = -7,37 \quad t_1 = -6,26$$

$$\hat{\tau}_2 = -7,37 \quad t_2 = 2,02$$

$$\hat{\tau}_3 = -7,37 \quad t_3 = 4,22$$

$$\hat{V}ar\left(\hat{\tau}_j\right) = \frac{27.75}{5*4} = 1,388$$



Valor-p ajustado	1	2	3
Bonferroni	0.0007343535	0.2330218528	0.0086255918
FDR	0.0007343535	0.0776739509	0.0043127959

Conclusão sobre o efeito de Método de Ensino?

Modelo Linear Misto

Tabela de ANOVA - Modelo Misto

	Df	Sum Sq	Mean Sq	**F value**	
Método (A:Fixo)	2	1695.63	847.82	FA: 847.82/27.75=30.55	<0.001*
Instrutor (B:Aleatório)	4	190.57	47.64	FB: 47.64/66.50= 0.72	0.5851
Método*Instrutor(AB:Aleat)	8	222.03	27.75	FAB: 27.75/66.50=0.42	0.9045
Residuals	45	2992.50	66.50		

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{QMB - QM\,\mathrm{Res}}{ra} = -1,57$$

$$\hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{QMAB - QM\,\mathrm{Res}}{r} = -9.69$$

Não significantes. Podem ser considerados nulos.

$$\hat{\sigma}_e^2 = QM\,\mathrm{Res} = 66.5$$

Modelos Lineares Mistos

Delineamentos com Dois Fatores

Expected Mean Squares for Balanced Two-Factor ANOVA Models.

Mean Square	df	Fixed ANOVA Model (*A* and *B* fixed)	Random ANOVA Model (*A* and *B* random)	Mixed ANOVA Model (*A* fixed, *B* random)
MSA	$a-1$	$\sigma^2 + nb\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + nb\sigma_\alpha^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + nb\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSB	$b-1$	$\sigma^2 + na\frac{\sum \beta_j^2}{b-1}$	$\sigma^2 + na\sigma_\beta^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + na\sigma_\beta^2$
MSAB	$(a-1)(b-1)$	$\sigma^2 + n\frac{\sum\sum(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSE	$(n-1)ab$	σ^2	σ^2	σ^2

n: número de réplicas

Neter et al., 2005

Modelo Misto: Um Fator Fixo e Um Fator Aleatório

Um nutricionista está interessado no consumo de 5 tipos de Menus. Restaurantes foram amostrados de um município e o consumo dos Menus (número de pedidos) foi avaliado.

	Tipo de Menu				
Restaurante	1	2	3	4	5
1	11	13	10	18	15
2	20	28	15	30	18
3	8	10	8	16	12
4	30	35	27	41	28

	Tipo de Menu				
Restaurante	1	2	3	4	5
5	14	16	13	22	16
6	25	27	26	33	25
7	43	46	41	55	42
8	13	14	12	20	13

Considere a análise destes dados supondo que existe correlação entre pedidos feitos em um mesmo restaurante.

Modelagem: Tipo de Menu como Fator Fixo e Restaurante como Fator Aleatório.
Como fica definida a estrutura de correlação entre as observações?
Qual é a diferença dos modelos se Restaurante for assumido como Fator Bloco?

Modelo Linear Misto – Formulação Matricial

$$y_{ijk} = \mu + \tau_j + u_{1k} + u_{2jk} + e_{ijk}$$

$$\sum_j \tau_j = 0,$$

$$u_{1k} \sim N\left(0; \sigma_1^2\right),\ u_{2jk} \sim N\left(0; \sigma_{12}^2\right),\ \sum_j u_{2jk} = 0$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0; \sigma_e^2\right), \quad u_{1k} \perp u_{2jk} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu + \tau_i\ ; \sigma_1^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$Cov\left(y_{ijk}; y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_e^2 & i = i' \\ \sigma_1^2 + \sigma_{12}^2 & i \neq i', j = j'; k = k' \\ \sigma_1^2 - \sigma_{12}^2 & i \neq i', j \neq j'; k = k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases}$$

$$Y_{n\times 1} = X_{n\times p}\beta_{p\times 1} + Z_{n\times q}u_{q\times 1} + e_{n\times 1}$$

$$E\left(Y\right) = X\beta$$

$$Cov\left(Y\right) = Z'\Delta Z + \Sigma$$

Modelo Linear Misto – Formulação Matricial

$$Y_{n\times 1} = X_{n\times p}\beta_{p\times 1} + Z_{n\times q}u_{q\times 1} + e_{n\times 1}$$

$$E(Y) = X\beta$$

$$Cov(Y) = Z'\Delta Z + \Sigma$$

Delineamento Fatorial 2x2 com r=2 replicas, fator A fixo e fator B aleatório

i=1,2
j=1,2
k=1,2

$$Y_{8\times 1} = \begin{pmatrix} y_{111} \\ y_{211} \\ y_{121} \\ y_{221} \\ y_{112} \\ y_{212} \\ y_{122} \\ y_{222} \end{pmatrix} Y_{n\times 1}, \quad X_{8\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_{2\times 1} = \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \end{pmatrix}, \quad Z_{8\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad u_{4\times 1} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{211} \\ u_{212} \end{pmatrix}$$

$$Cov(Y)_{8\times 8} = Z'\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{12}^2 \end{pmatrix} Z + I_8\sigma_e^2$$