17/11/2020

Na aula passada vimos que a força eletromotriz que surge num circuito em reação à passagem de uma corrente elétrica por esse pode ser escrita como

$$\mathcal{E} = - L \frac{dI}{dt}$$

onde L é a auto-indutância do circuito que expressa a proporcionalidade entre o fluxo magnético através do circuito e a corrente elétrica que o percorre

$$\Phi = L I$$

Tal FEM deve corresponder também ao trabalho por unidade de carga realizado por um agente externo e, portanto, a taxa com que tal trabalho é realizado quando a corrente no circuito é I é dada por

$$\frac{dW}{dt} = - \mathcal{E} I = L I \frac{dI}{dt}$$

O sinal de menos na última equação expressa o fato de que o trabalho é feito pelo agente externo para se opor a FEM induzida.

Logo o trabalho total do agente externo

$$W = \int \frac{dW}{dt}\, dt = \int dW = L \int I \frac{dI}{dt}\, dt$$

$$= L \int I\, dI = \frac{1}{2} L I^2$$

Vamos estabelecer agora a relação entre o trabalho

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

e o campo magnético gerado pelo circuito ou o potencial vetor

$$\Phi = L I = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

curva suporte de S

Portanto

$$LI = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

e

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint (\vec{A} \cdot \vec{I}) \, dl$$

Podemos generalizar a expressão acima para o caso de uma densidade volumétrica de corrente $\vec{J}$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} \, d\tau$$

Usando a lei de Ampère ($\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$), temos

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \, d\tau$$

Além disso

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{= \vec{B}} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$= B^2 - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Então

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left\{ \int_V B^2 \, d\tau - \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\, d\tau \right\}$$

Usando o teorema da divergência podemos escrever o segundo como integral de superfície

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left\{ \int_V B^2 \, d\tau - \oint_S (\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{a} \right\}$$

Se estendermos a integral de volume ao espaço inteiro, a integral de superfície deve ir a zero, pois o mais lento que $\vec{A}$ pode ir a zero no infinito é

$$\vec{A} \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \text{(termo de dipolo)}$$

enquanto para $\vec{B}$

$$\vec{B} \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\right] \quad \text{(dipolo)}$$

logo

$$\oint_S (\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{a} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

Sendo assim, chegamos finalmente à expressão para a energia armazenada no campo magnético $\vec{B}$

$$\boxed{W_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{todo espaço}} B^2 \, d\tau}$$

O que mostra que a densidade de energia magnética é $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Essa expressão é **semelhante à** do caso eletrostático

$$W_{elec} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{todo espaço}} E^2 \, d\tau$$

Por exemplo, sabemos que o campo magnético gerado por um cabo coaxial de raio interno a e raio externo b, percorrido por corrente I é

$$\vec{B}(s) = \begin{cases} 0, & s < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}, & a \leq s \leq b \\ 0, & s > b \end{cases}$$

Portanto, há na região $a \leq s \leq b$ uma densidade de energia magnética

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

Num comprimento l de cabo há então uma energia magnética

$$W_{mag} = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dz = \int_0^l \int_a^b \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi s \, ds dz$$

$$= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{ds}{s} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Essa energia também pode ser escrita como vimos inicialmente como

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

de onde identificamos a auto-indutância de um trecho de comprimento l do cabo coaxial

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Leftarrow$$ só depende da geometria

Chegamos num ponto no curso em que temos as equações de Maxwell em formato quase completo.

Até agora podemos escrever

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauss}) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \quad (\text{Ampère})$$

O uso da expressão "quase completo" acima vem do fato de que o conjunto de eqs acima possui uma inconsistência fundamental com a teoria do Cálculo Vetorial.

Sabemos que, por construção, o divergente de um rotacional é identicamente nulo.

A lei de Faraday é completamente consistente com isso

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\cancelto{0}{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}\right) = 0$$

Entretanto, usando a lei de Ampère

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \qquad (*)$$

Na magnetostática, vimos que $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$, mas fora dela, a lei de Ampère é claramente inconsistente com a teoria de campos vetoriais.

Recapitulando o que vimos no curso, a equação acima possui uma outra inconsistência: ela é incompatível em geral com a lei de conservação de carga elétrica expressa pela equação da continuidade que implica que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Essa constatação acaba por nos fornecer uma solução para a inconsistência. E se no lado direito de $(*)$, ao invés de $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$ somente, tivermos a combinação idênticamente nula $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}$?

Isso solucionaria tanto a inconsistência com o cálculo vetorial quanto a incompatibilidade com conservação de carga elétrica.

Levemos essa ideia adiante escrevendo

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Usando a lei de Gauss para escrever $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, temos

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right)$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \left[\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

Isso implicaria que o problema pode ser resolvido se modificarmos a lei de Ampère para

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$ (lei de Ampère-Maxwell)

cujo nome se deve ao fato de que foi Maxwell que adicionou o segundo termo ao lado direito e chamou a combinação

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

de corrente de deslocamento

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_d),$$

apesar de $\vec{J}_d$ não ter nada a ver com qualquer corrente física associada ao movimento de cargas elétricas.

Esse termo extra $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ não havia sido detectado por Faraday nem por Ampère porque nas condições experimentais abordadas por eles, tal termo é completamente desprezível em comparação a $\mu_0 \vec{J}$.

A confirmação da teoria de Maxwell com sua "corrente" de deslocamento só viria em 1888 com os experimentos de Hertz com ondas eletromagnéticas.

A existência de soluções tipo onda das equações de Maxwell depende criticamente da presença do termo com a corrente de deslocamento na lei de Ampère-Maxwell.

A presença do termo $\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ também melhora o aspecto estético da teoria, no sentido de que não só um campo magnético variável gera campo elétrico, como também um campo elétrico variável gera campo magnético.

Resumindo:

Equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{(Gauss)} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Faraday)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(Ampère-Maxwell)

cargas e correntes ⟶ campos

Lei de força

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

campos ⟶ cargas e correntes

As equações de Maxwell, na forma apresentada na página anterior, são válidas tanto no vácuo quanto em meios materiais.

Entretanto, em meios materiais, muitas vezes é vantajoso reescrever algumas delas em termos do campo de deslocamento elétrico $\vec{D}$ e do campo $\vec{H}$.

Para a lei de Gauss, fizemos isso separando a densidade de carga ρ em livre (ρ_f) e ligada (ρ_b)

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)}_{\equiv \vec{D}} = \rho_f$$

Portanto:

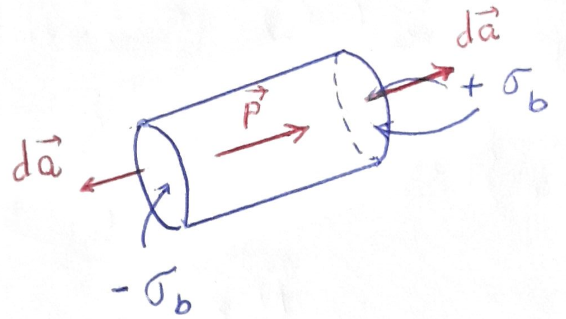
$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f}$$

Num meio magnetizável fizemos algo similar com as correntes

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Na presença de um campo elétrico variável, entretanto, precisamos levar em conta outro tipo de corrente ligada associada à polarização que agora é dependente do tempo.

Já que a polarização $\vec{P}$ efetivamente introduz densidades superficiais $\sigma_b = P$ e $\sigma_b = -P$ em cada extremidade de um pequeno elemento de volume do material



$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = P$$

então as cargas acumuladas em cada face são

$$q_+ = \sigma_b \, da_\perp = P \, da_\perp$$

$$q_- = -\sigma_b \, da_\perp = -P \, da_\perp$$

se no intervalo Δt a polarização vai de $P(t)$ a $P(t+\Delta t)$, temos

$$\Delta q_+ = q_+(t+\Delta t) - q_+(t) = [P(t+\Delta t) - P(t)] \, da_\perp$$

$$\Delta q_- = q_-(t+\Delta t) - q_-(t) = -[P(t+\Delta t) - P(t)] \, da_\perp$$

Logo, as correspondentes correntes através das faces são dadas por

$$I_+ = \frac{dq_+}{dt} = +\frac{\partial P}{\partial t}\, da_\perp = J_p\, da_\perp$$

$$I_- = -\frac{dq_-}{dt} = +\frac{\partial P}{\partial t}\, da_\perp = J_p\, da_\perp$$

Ou seja, o que temos efetivamente é uma corrente, chamada de corrente de polarização no volume do material dada por

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Perceba que $\vec{J}_p$ não tem nada a ver com a corrente ligada de magnetização $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$.

Portanto, podemos dividir a densidade de corrente total $\vec{J}$ como

$$\vec{J} = \underbrace{\vec{J}_f}_{\text{condução ou livre}} + \underbrace{\vec{J}_b}_{\text{magnetização (ligada)}} + \underbrace{\vec{J}_p}_{\text{polarização variável}}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Portanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right)}_{\equiv \vec{H}} = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right)}_{\equiv \vec{D}}$$

Então

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

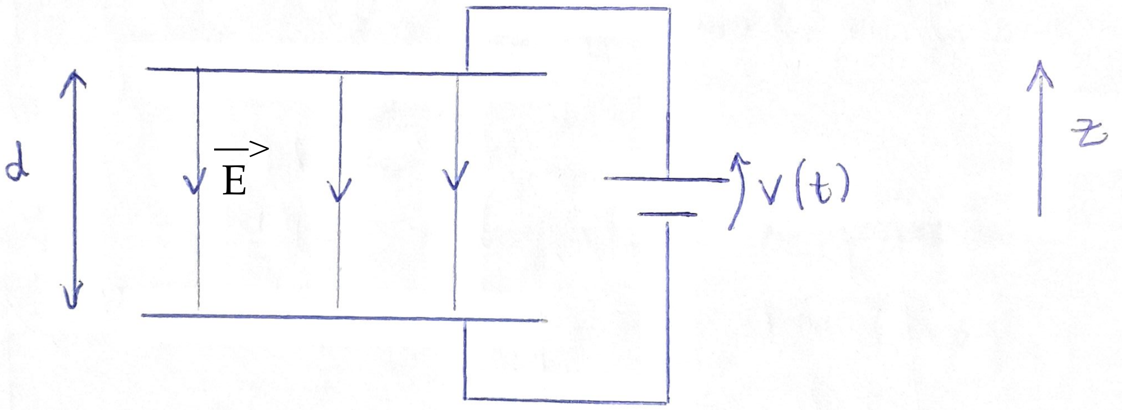
Sendo, assim, em termos de cargas e correntes livres temos

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}}$$

Tome, por exemplo, um capacitor imerso em água do mar e operado de forma que a tensão entre suas placas é alternada e dada por

$$V(t) = V_0 \cos(2\pi\nu t)$$

com $\nu = 0.4\,\mathrm{GHz}$ e na qual a água do mar tem permissividade $\epsilon = 81\,\epsilon_0$, permeabilidade $\mu = \mu_0$ e resistividade $\rho = 0.23\,\Omega\,\mathrm{m}$.



Campo elétrico:

$$\vec{E} = \frac{V(t)}{d}\,\hat{z} = \frac{V_0}{d}\cos(2\pi\nu t)\,\hat{z}$$

Polarização:

$$\vec{P} = \epsilon\vec{E} = \frac{\epsilon V_0}{d}\cos(2\pi\nu t)\,\hat{z}$$

Corrente de condução:

$$\vec{J}_f = \underbrace{\sigma}_{\text{condutividade}} \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \underbrace{\frac{V_0}{\rho d}}_{\text{amplitude da corrente de condução } (A_c)} \cos(2\pi\nu t)\,\hat{z}$$

Corrente de polarização:

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\underbrace{\frac{2\pi\epsilon\nu V_0}{d}}_{\text{amplitude da corrente de polarização } (A_p)} \sin(2\pi\nu t)\,\hat{z}$$

Logo

$$\frac{A_c}{A_p} = \frac{1}{2\pi\epsilon\nu\rho} \simeq 2{,}41$$

Ou seja, nessas frequências, não é possível desprezar a corrente de polarização na água do mar!