ESTABILIDADE PARA SISTEMAS LINEARES

O problema de estabilidade de equilíbrios pode ser estudado de maneira completa no caso de sistemas autônomos lineares, ou seja, sistemas do tipo:

$$
\begin{cases}
\dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\
\dot{x_2} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\
\cdots \\
\dot{x_n} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{2n}x_n
\end{cases}
\tag{1}
$$

ou, em notação vetorial

$$
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{2}
$$

De fato, podemos provar o seguinte resultado sobre a estabilidade do equilíbrio $\mathbf{x} = 0$. (no que segue, indicamos por $\|\mathbf{x}\|$ a norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$.)

Teorema 1. *Se os autovalores de $\boldsymbol{A}$ têm todos parte real não positiva e os autovalores com parte real nula são simples, então a solução $\boldsymbol{x} = 0$ de (2) é estável. Se os autovalores têm todos parte real estritamente negativa, então a solução nula de (2) é assintoticamente estável e existem constantes $K > 0$ e $\sigma > 0$, tal que a solução $\Phi(t, x_0)$, com condição inicial x_0, satisfaz: $\|\Phi(t, x_0)\| \leq Ke^{-\sigma t}||\boldsymbol{x}_0||$. (aqui $\|\cdot\|$ indica a norma euclidiana.) Finalmente, se algum autovalor tem parte real positiva, então a solução nula é instável.*

Date: November 16, 2020.

Para a prova vamos precisar de dois resultados auxiliares:

Lema 2. *Se $p(t)$ é um polinômio e λ é um número real, então, para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante $K > 0$, tal que $|p(t)e^{\lambda t}| \leq Ke^{(\lambda+\epsilon)t}$ para $t \geq 0$.*

Lema 3. *Se $\boldsymbol{A} = (a)_{ij}$ é uma matriz $n \times n$ com coeficientes complexos então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|$, sendo $\|\boldsymbol{A}\| = \left(\sum_{ij} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ a norma euclidiana de $\boldsymbol{A}$.*

Demonstração do Teorema 1: Seja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_n$ uma base do $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores generalizados de $\mathbf{A}$. Umas base do espaço das soluções de (2) é dado por $\mathbf{w}_1(t), \mathbf{w}_2(t), \cdots, \mathbf{w}_n(t)$, sendo cada $\mathbf{w}_i(t)$, da forma $e^{\lambda_i t} \sum_j t^{m_{ij}} \mathbf{v}_j$.

Seja $\Phi(t) = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n]$ a solução fundamental de (2) cujas colunas são essas soluções. Então cada coeficiente da matriz $\Phi(t)$ é da forma $p_i(t)e^{\lambda_i t}$.

Para toda condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a solução do problema, com condição inicial x_0, será:

$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(0)x_0 \Longrightarrow \|x(t)\| = \|\Phi(t)\| \cdot \|\Phi^{-1}(0)\| \cdot \|x_0\|$.

Se $Re(\lambda_j) < \delta$, segue do Lema 2, que para todo coeficiente $b_{ij}(t)$ de $\Phi(t)$ teremos $b_{ij}(t) \leq K_{ij}e^{\delta t}$. Em particular, se $\delta < 0$ $b_{ij}(t)$ vai a zero exponencialmente. Se λ é autovalor simples e $Re(\lambda) = 0$, teremos adicionalmente alguns coeficientes limitados por constantes independentes de t.

Os resultados de estabilidade seguem então do Lema 3.

Se λ tem parte real positiva e $\mathbf{v}$ é autovetor associado então $x(t) = \epsilon e^{\lambda t}\mathbf{v}$ é solução com condição inicial arbitrariamente próxima de zero, cuja norma tende a $+\infty$, quando $t \to \infty$. $\square$

Observação 4. *Na demonstração acima, vimos qeue os coeficientes $b_{ij}(t)$ de uma matriz fundamental $\Phi(t)$ do sistema 2 satisfazem a desigualdade $|b_{ij}(t)| \leq K_{ij}e^{\delta t}$, sendo δ um número real qualquer maior que a parte real do autovalor λ_i . Sendo $e^{tA} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$, o mesmo ocorre para e^{tA}. Em particular se $K = \max\{k_{ij}\}$ e δ um número real qualquer maior que a parte real de qualquer autovalor, teremos, usando o Lema 3*

$$\|e^{tA}\| \leq Ke^{\delta t}. \tag{3}$$