PNV 3421 _ Processos Estocásticos

Notas de Aula - Teoria de Filas 12/11/2020

1 _ Revisão da Aula de 29/10/2020

A aula de 29/10/2020 foi dedicada ao estudo do processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ em que $N(t)$ é o número de clientes no sistema num instante t qualquer para a fila M/M/1. A Figura 1 ilustra a evolução do processo entre os instantes t e $t+dt$.

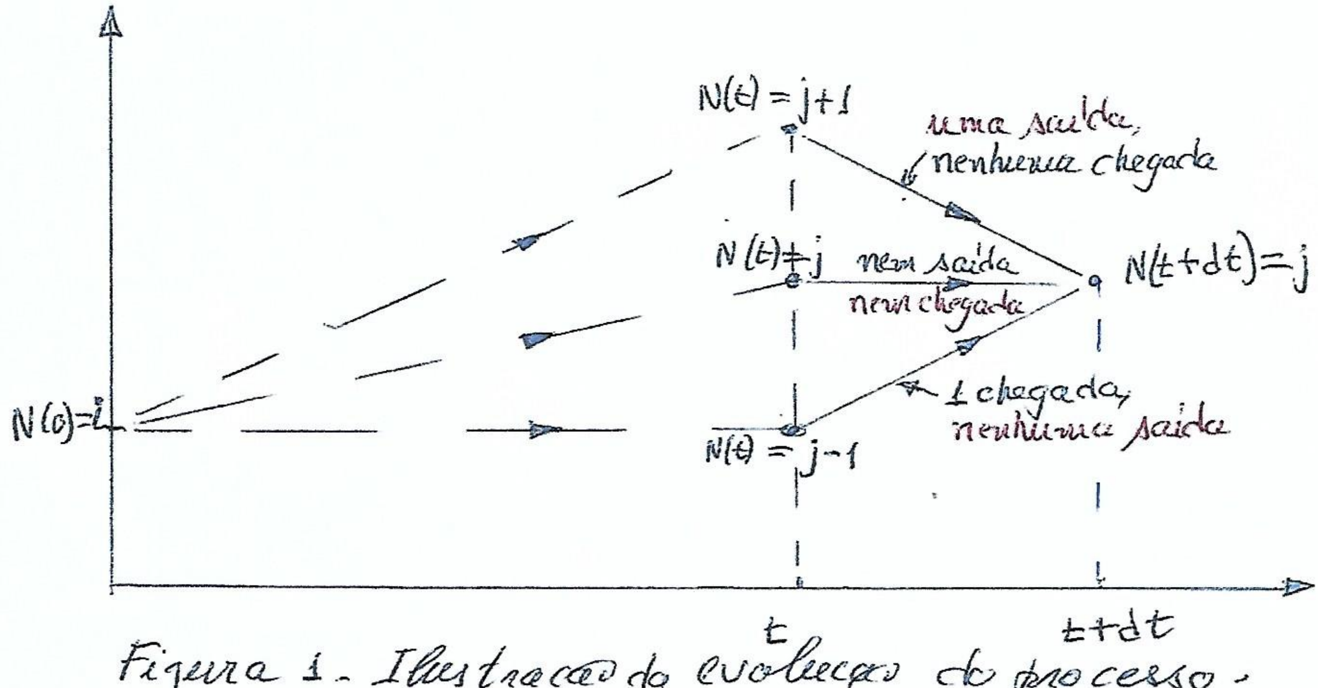

Figura 1 - Ilustração da evolução do processo.

A partir da Figura 1, é possível escrever para qualquer $j \geq 1$:

$$P[N(t+dt)=j/N(0)=i] =$$

$$= P[N(t)=j-1/N(0)=i] \times P[N(t+dt)=j/N(t)=j-1] +$$
$$+ P[N(t)=j/N(0)=i] \times P[N(t+dt)=j/N(t)=j] +$$
$$+ P[N(t)=j+1/N(0)=i] \times P[N(t+dt)=j/N(t)=j+1] =$$

$$= \lambda dt(1-\mu dt) \cdot P[N(t)=j-1/N(0)=i] +$$
$$+ (1-\lambda dt)(1-\mu dt) \cdot P[N(t)=j/N(0)=i] +$$
$$+ \mu dt(1-\lambda dt) \cdot P[N(t)=j+1/N(0)=i] \qquad (1)$$

Eliminando-se em (1) os termos em $(dt)^2$ (infinitésimos de segunda ordem), obtém-se a expressão:

$$P[N(t+dt)=j/N(0)=i] =$$

$$= P[N(t)=j/N(0)=i] +$$
$$+ \lambda dt \, P[N(t)=j-1/N(0)=i] +$$
$$+ \mu dt \, P[N(t)=j+1/N(0)=i] +$$
$$- (\lambda+\mu)dt \times P[N(t)=j/N(0)=i] \qquad (2)$$

A partir de (2), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$P'[N(t)=j/N(0)=i] =$$
$$= \lambda * P[N(t)=j-1/N(0)=i] +$$
$$+ \mu * P[N(t)=j+1/N(0)=i] +$$
$$- (\lambda+\mu) * P[N(t)=j/N(0)=i] \quad , j=1,2,\dots \quad (3)$$

Para $j=0$, vale a equação:

$$P'[N(t)=0/N(0)=i] =$$
$$= \mu * P[N(t)=1/N(0)=i] +$$
$$- \lambda * P[N(t)=0/N(0)=i] \quad (4)$$

Admitindo a existência de distribuição estacionária, isto é que exista, para todo j,

$$\lim_{t \to \infty} P[N(t)=j/N(0)=i] = p_j$$

de (3) e (4) resultam as equações:

$$\lambda p_{j-1} + \mu p_{j+1} = (\lambda+\mu) p_j \quad , j=1,2,\dots \quad (5)$$

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad (6)$$

Com as equações (5), (6) e mais a equação

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \qquad (6')$$

e admitindo que $\rho = \lambda/\mu < 1$, condição para a existência da distribuição estacionária p_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, calculam-se os valores:

$$p_0 = (1-\rho) \qquad (7)$$

$$p_j = \rho^j p_0 = \rho^j (1-\rho) \qquad (8)$$

Diagrama das taxas de transição

As equações (4) e (5) que estabelecem as relações entre as probabilidades estacionárias p_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, podem ser visualizadas no diagrama das taxas de transição da Figura 2.

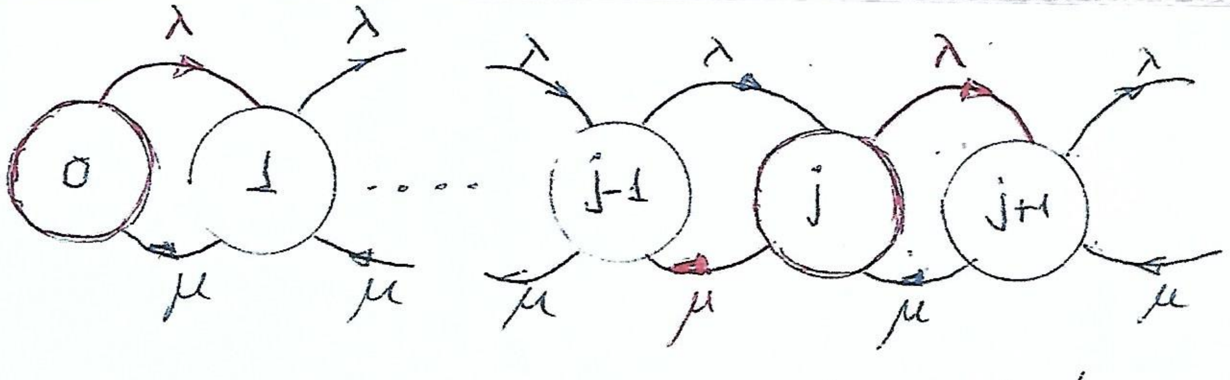

Figura 2 Diagrama das taxas de transição (de probabilidades) em regime estacionário para a fila M/M/1

Número médio de clientes no sistema, num instante t qualquer em regime estacionário, L

A partir das expressões (7) e (8) resulta para a média da distribuição das probabilidades p_j o valor L

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} j\, p_j = \frac{\rho}{(1-\rho)} \qquad (9)$$

Relação entre as probabilidades estacionárias do processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ e as probabilidades estacionárias π_j da cadeia de Markov para a fila M/M/1.

$$p_j = \frac{\pi_j\, \mu_j}{\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \mu_i} \qquad (10)$$

em que μ_j é o tempo médio de permanência no estado j (cada vez que entra no estado j).
Para a fila M/M/1, $\mu_0 = 1/\lambda$ e, para qualquer $j \geq 1$, $\mu_j = 1/(\lambda+\mu)$. Cabe lembrar que $\pi_0 = (1-\rho)/2$ e $\pi_j = (1+\rho)\rho^{j-1}\pi_0$.

2. Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

Um processo estocástico em tempo contínuo, $\{N(t), t \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov em tempo contínuo se:

1) as transições entre estados ocorrem de acordo com uma cadeia de Markov (isto é, as probabilidades de transição dependem apenas do estado presente, não sendo influenciadas pelos estados passados);

2. após entrar num estado i, o tempo de permanência neste estado é uma variável exponencial com média $1/\alpha_i$, ou com função acumulada de probabilidade $H_i(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$. (novamente a falta de memória)

Para o processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ estudado na aula de 29/10/2020, em que $N(t)$ representa o número de clientes no sistema no instante t, para uma fila M/M/1:

1) a cadeia de Markov (denominada imersa) tem probabilidades de transição:

$$p_{01} = 1$$

$$p_{i,i-1} = \mu/(\lambda+\mu) \quad \text{e} \quad p_{i,i+1} = \lambda/(\lambda+\mu) \qquad i \geq 1$$

2) O tempo de permanência no estado 0 tem função acumulada de probabilidade $H_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ e o tempo de permanência em qualquer estado i, $i \geq 1$, tem função acumulada de probabilidade $H_i(t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$.

Isto significa $\alpha_0 = \lambda$, $\alpha_i = (\lambda + \mu)$, $i \geq 1$.

E cabe ainda observar que no diagrama das taxas de transição da Figura (2):

1 - a taxa para frente λ é igual ao produto $\alpha_i \, p_{i,i+1}$; e

2 - a taxa para trás μ é igual ao produto $\alpha_i \, p_{i,i-1}$.

Processo de Nascimento e Morte (Birth and death process) <u>definição</u>

Uma cadeia de Markov em tempo contínuo é um processo de nascimento e morte se $p_{ij} = 0$ para $|i-j| \geq 2$.

<u>Observação</u> A cadeia de Markov em tempo contínuo $\{N(t), t \geq 0\}$ da fila $M/M/1$ é um processo de nascimento e morte.

Nas páginas que seguem serão estudadas diversas cadeias de Markov em tempo contínuo com a finalidade de determinar a distribuição de probabilidades estacionárias p_j

$$p_j = \lim_{t \to \infty} P[N(t) = j \,/\, N(0) = i]$$

Não se pretende, como foi feito para a fila M/M/1, deduzir o sistema de equações diferenciais para $P[N(t) = j / N(0) = i]$, mas iniciar o estudo pela construção do diagrama das taxas de transição e, a partir dele, escrever as equações de equilíbrio para as probabilidades de cada estado j

3. Estudo da Fila M/M/2

Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ o número de clientes no sistema no instante t para a fila M/M/2. Conforme já visto anteriormente, para a cadeia de Markov em tempo discreto imersa, as probabilidades de transição têm os seguintes valores:

$$p_{01} = 1, \quad p_{10} = \mu/(\lambda+\mu), \quad p_{12} = \lambda/(\lambda+\mu)$$

$$p_{i,i-1} = 2\mu/(\lambda+2\mu) \text{ e } p_{i,i+1} = \lambda/(\lambda+2\mu), \quad i \geq 2$$

Por sua vez, para os tempos de permanência em cada estado,

$$H_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad , \quad H_1(t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$$

e $$H_i(t) = 1 - e^{-(\lambda+2\mu)t}$$

O digrama das taxas de transição é apresentado na Figura 3.

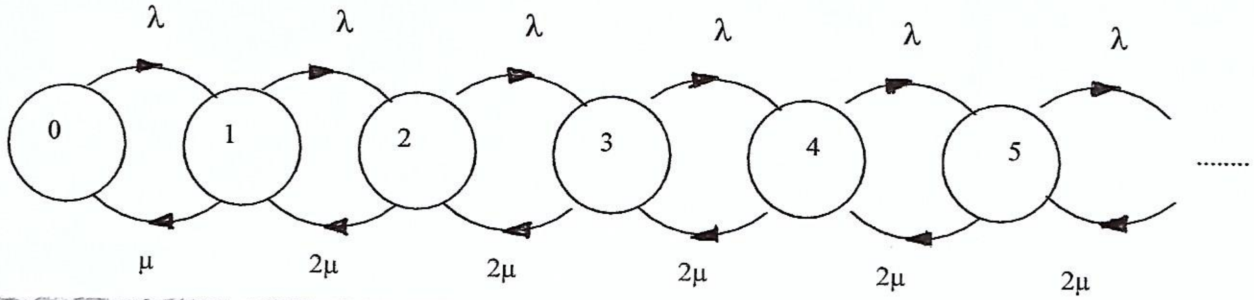

Figura 3. Diagrama das taxas de transição para a fila M/M/2.

A partir da figura 3, valem as seguintes equações de equilíbrio (regime estacionário):

- para o estado 0 $\qquad \lambda p_0 = \mu p_1 \qquad (11)$
- para o estado 1 $\qquad (\lambda+\mu) p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2 \qquad (12)$
- para qualquer estado $i \geq 2$ $\qquad (\lambda + 2\mu) p_i = \lambda p_{i-1} + 2\mu p_{i+1} \qquad (13)$

Definindo-se $\rho = \lambda / 2\mu$, de (11) vem

$$p_1 = 2\rho p_0 \qquad (14)$$

De (12) e (14),

$$p_2 = \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\, 2\rho p_0 - \frac{\lambda}{2\mu} p_0 =$$

$$2\rho^2 p_0 + \rho p_0 - \rho p_0 = 2\rho^2 p_0 \quad (15)$$

De (13), para $i = 2$, e de (15) resulta

$$p_3 = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \cdot 2\rho^2 p_0 - \frac{\lambda}{2\mu} 2\rho p_0 =$$

$$= 2\rho^3 p_0 + 2\rho^2 p_0 - 2\rho^2 p_0 = 2\rho^3 p_0 \quad (16)$$

Por procedimento análogo, obtém-se para todo $j \geq 1$,

$$p_j = 2\rho^j p_0 \quad , \; j = 1, 2, \ldots \quad (17)$$

Incluindo agora a equação

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \quad (18)$$

conclui-se que a distribuição estacionária existe se e somente se $\rho = \lambda/2\mu < 1$ e, em tal caso, o valor de p_0 é:

$$p_0 \left(1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j\right) = p_0 \left(1 + 2\rho/(1-\rho)\right) = 1$$

e $p_0 = (1+\rho)/(1-\rho)$ (19)

O número médio de clientes no sistema em um instante qualquer t, em regime estacionário corresponde à média da distribuição das probabilidades p_j. Assim,

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} j\, p_j = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot 2\rho^j p_0 =$$

$$= 2\rho p_0 \sum_{j=1}^{\infty} j\rho^{j-1} = 2\rho p_0 \times \frac{1}{(1-\rho)^2} =$$

$$2\rho\,\frac{(1-\rho)}{(1+\rho)} \times \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{2\rho}{1-\rho^2} \qquad (20)$$

<u>Sugestão</u> Como modificaria sua resposta para a Questão 3 da P2 se você utilizasse a condição $L \leq 4$ (cadeia de Markov em tempo contínuo em lugar de $L' \leq 4$ (cadeia de Markov em tempo discreto) como limite para a operação com 2 berços?

Reportando-se diretamente à Questão 9 da 2ª Série de Problemas, a condição limite para a operação com um berço era, àquela altura, apenas com o conhecimento de cadeia de Markov (em tempo discreto):

$$L' = \frac{(\rho+1)}{2(1-\rho)} \leq 4 \quad , \text{ que implica}$$

$$\rho \leq 7/9 \qquad (21)$$

Agora, com o conhecimento de cadeias de Markov em tempo contínuo,

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \leq 4, \text{ implicando}$$

$$\rho \leq 0{,}8 \qquad (22)$$

Comparando-se (21) e (22), conclui-se que a utilização de cadeias de Markov em tempo discreto conduziria a uma antecipação do início de operação de um segundo berço.

4- Estudo da Fila M/M/1 para a qual qualquer atendimento tem probabilidade p de ser defeituoso

A Figura 4 mostra o diagrama das taxas de transição para uma fila M/M/1 para a qual qualquer atendimento tem probabilidade p de ser defeituoso. Quando isto ocorre, não há mudança do número de clientes no sistema. Comparando-se as taxas da Figura 4 com as taxas da Figura 2, referentes a uma fila M/M/1 convencional, verifica-se que há mudança apenas nas taxas para trás (isto é, de um estado i para o estado $(i-1)$) de μ para $\mu(1-p)$. Isto ocorre pois, ao fim de um atendimento, a probabilidade de haver uma saída, com a redução do número de clientes no sistema de i para $(i-1)$, é igual a $(1-p)$.

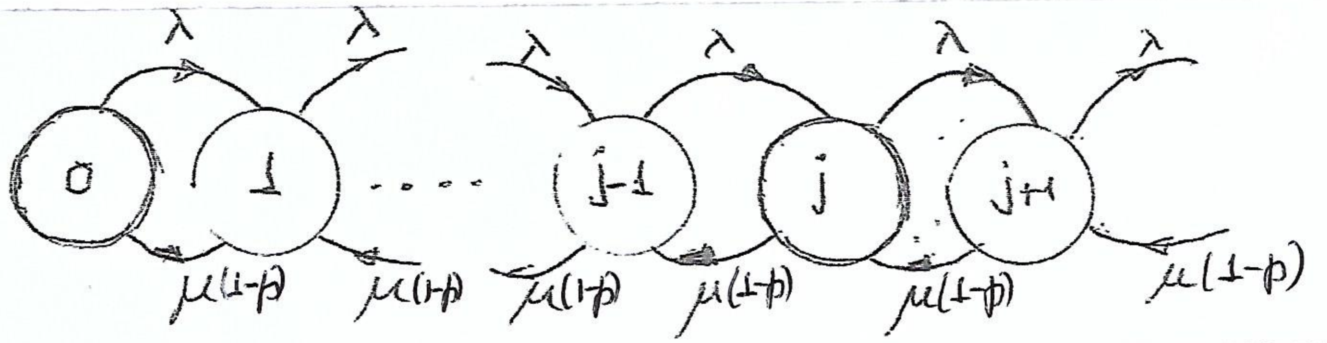

Figura 4 - Diagrama das taxas de transição para a fila M/M/1 na qual cada atendimento tem probabilidade p de ser defeituoso.

A partir do diagrama da Figura 4, as equações de equilíbrio para cada estado, em regime estacionário, são:

1) para o estado 0 $\quad \lambda p_0 = \mu(1-p)\, p_1$

do que resulta $\quad p_1 = p_0 \dfrac{\lambda}{\mu(1-p)} \qquad (23)$

definindo $\rho = \lambda/\mu(1-p)$, de (23) obtém-se:

$$p_1 = \rho p_0 \quad (24)$$

2) para o estado 1

$$(\lambda + \mu(1-p)] p_1 = \lambda p_0 + \mu(1-p) p_2$$

$$\therefore \quad p_2 = \frac{\lambda + \mu(1-p)}{\mu(1-p)} \rho p_0 - \frac{\lambda}{\mu(1-p)} p_0 =$$

$$= \rho^2 p_0 + \rho p_0 - \rho p_0 = \rho^2 p_0 \quad (25)$$

3) para o estado 2

$$(\lambda + \mu(1-p)) p_2 = \lambda p_1 + \mu(1-p) p_3$$

$$\therefore \quad p_3 = \frac{\lambda + \mu(1-p)}{\mu(1-p)} \rho^2 p_0 - \frac{\lambda}{\mu(1-p)} \rho p_0 =$$

$$= \rho^3 p_0 + \rho^2 p_0 - \rho^2 p_0 = \rho^3 p_0 \quad (26)$$

Generalizando,

$$p_j = \rho^j p_0 \quad , j = 0, 1, 2, \ldots \quad (27)$$

Pela semelhança entre esses resultados e aqueles vistos para a fila M/M/1 convencional, conclui-se que:

a) existe a distribuição estacionária se e somente se $\rho = \lambda/\mu(1-p)$ for menor que 1;

b) para $\rho < 1$, obtém-se $p_0 = (1-\rho)$ (28)

c) o número médio de clientes no sistema em um instante qualquer t do regime estacionário, L tem o valor

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j = \rho/(1-\rho) \quad (30)$$

Tempo total médio de atendimento de um cliente

Seja N o número de atendimentos até obter o sucesso no atendimento; a variável N tem distribuição geométrica:

$$P[N=n] = p^{n-1}(1-p)$$

Assim, o tempo total médio de um cliente é calculado por

$$E[\text{tempo total de atendimento}] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[\text{tempo total de atendimento}/N=n] \cdot P[N=n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mu} p^{n-1}(1-p) = \frac{(1-p)}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} =$$

$$= \frac{(1-p)}{\mu} \times \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{\mu(1-p)} \qquad (31)$$

Assim, o parâmetro ρ

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu(1-p)} = \frac{1/\mu(1-p)}{1/\lambda} \qquad (32)$$

pode ser também interpretado como a razão entre o tempo total médio de atendimento de um cliente e o intervalo médio entre chegadas consecutivos, a exemplo do que ocorre para uma fila M/M/1 convencional.