16/11/2020 - Aula 19

- Começamos com as dúvidas nos exercícios de lição de casa.

(a) Critério da integral - exercício final:

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-4)\sqrt{n-4}}$$

No enunciado do critério, a série começava de $n=1$ e a função a ser integrada deve estar definida para $x \geq 1$.

Na série dada acima, os termos só estão definidos para $n \geq 5$.

Neste caso, tomamos $f(x) = \frac{1}{(x-5)\sqrt{x-5}}$, $\underline{x \geq 5}$ e prosseguimos normalmente, porque, na verdade o teorema pode ser demonstrado com o seguinte enunciado:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Seja } f \text{ uma função } \underline{\text{contínua}}, \underline{\text{positiva}} \text{ e } \underline{\text{decrescente}} \text{ no intervalo } [\underline{n_0}, \infty[\text{ (para algum } n_0 \text{ fixado) e} \\ \text{seja } a_n = f(n),\ n \geq \underline{n_0}. \text{ Então} \\ \displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ é convergente} \iff \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \text{ é convergente.}\end{array}}$$

Recordando alguns resultados:

• Séries Convergentes:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p > 1$. (p-série)

(b) $\sum a \cdot r^n$, com $|r| < 1$ (série geométrica)

• Séries Divergentes:

(a) $\sum \frac{1}{n}$ (Série Harmônica)

(a') $\sum \frac{1}{n^p}$, $p \leq 1$

(b) $\sum a r^n$, $|r| \geq 1$.

Exercício (g) da Lição de Casa sobre o Crit. da Comparação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{n^2+1+n^6}}$$

>1 ?

$$a_n = \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}} = \frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)}{n^3\sqrt{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^4}+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1}{\sqrt{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^4}+1}}\right)$$

Vamos provar que $a_n > \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$ para poder concluir que a série dada é divergente, pelo critério da comparação.

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} > \frac{1}{n^4}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^6}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > 1 + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}.$$

Além disso, sabemos (propriedades dos reais!)

se $a > 1$ então $a > \sqrt{a}$

Como $1 + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} > 1$, $\forall n$, podemos concluir

que

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > 1 + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} > \sqrt{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}$$

Logo

$$\frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}} > 1$$

Isso prova que $a_n > \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, pelo Critério da Comparação podemos concluir que $\sum a_n$ é divergente.

Critério das Séries Alternadas

São séries da forma

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$$

ou

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - \dots$$

$$(a_n > 0, \ \forall n)$$

Ideia

Somas parciais para

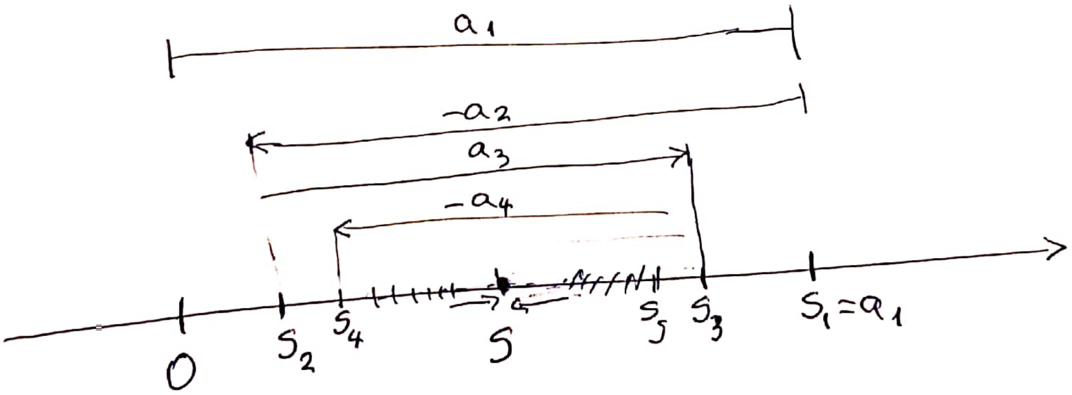
$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

$S_1 = a_1 > 0$

$S_2 = a_1 - a_2 < a_1 = S_1$

Se $a_2 < a_1$

$S_2 > 0$



Se $a_3 < a_2$

$S_3 = S_2 + a_3 > S_2$ mas $S_3 < S_1$

Se $\lim a_n = 0$
$$\begin{cases} S_2, S_4, S_6 \dots \to S \\ S_1, S_3, S_5 \dots \to S \end{cases}$$

Teorema (Critério das Séries Alternadas)

Seja (a_n) uma sequência de termos positivos $(a_n > 0, \forall n)$ e considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Se $\begin{cases} (i) \ a_{n+1} < a_n, \ \forall n \quad \text{(a seq. } (a_n) \text{ é decrescente)} \\ (ii) \ \lim a_n = 0 \end{cases}$

então a série alternada é convergente.

Demonstração (para a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$). Definimos

$S_1 = a_1 \qquad S_1 > 0$

$S_2 = a_1 - a_2 \qquad 0 < S_2 < S_1$ ($0 < S_2$: $a_2 < a_1$; $S_2 < S_1$: $a_2 > 0$)

$S_3 = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{S_2} + a_3 \qquad S_2 < S_3 < S_1$ ($S_2 < S_3$: $a_3 > 0$; $S_3 < S_1$: $a_3 < a_2 < a_1$)

$\vdots$

$S_4 = \underbrace{(\overbrace{a_1 - a_2}^{S_2} + a_3)}_{S_3} - a_4 \qquad S_2 < S_4 < S_3$ ($S_2 < S_4$: $a_4 < a_3$; $S_4 < S_3$: $a_4 > 0$)

etc...

$$S_{2n} = S_{2(n-1)} + \overbrace{a_{2n-1} - a_{2n}}^{>0 \text{ porque } a_{2n} < a_{2n-1}} > S_{2(n-1)} \quad , \underline{\forall n}.$$

$$(S_2 < S_4 < S_6 < \dots).$$

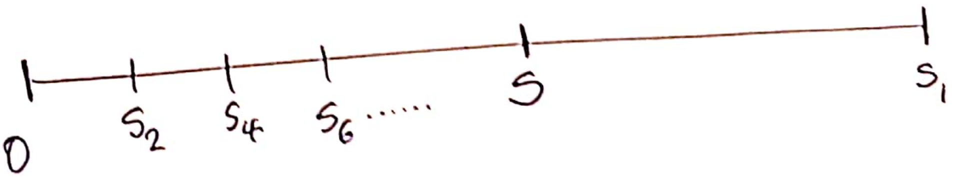
$$S_{2n} < a_1 \quad , \quad \forall n.$$

$$\parallel$$

$$S_{2n} = a_1 \underbrace{- a_2 + a_3 + \dots + (-a_{2n})}_{<0} < a_1$$

Portanto, a sequência $(S_{2n})_n$ é crescente e limitada

$$\overset{(T.5)}{\Longrightarrow} \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$



Vamos provar que $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

$\exists \lim S_{2n} = S$

$\exists \boxed{\lim a_{2n+1} = 0}$

$$\lim S_{2n+1} = \lim (S_{2n} + a_{2n+1}) \overset{\downarrow}{=} \lim S_{2n} + \lim a_{2n+1}$$

$$= S + 0 = S$$

(*) $(a_{2n+1})_n$ é subsequência de (a_n).

$(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ por hipótese $\lim a_n = 0$

$(a_{2n+1})_n = (a_3, a_5, a_7, \dots)$ $\overset{(\text{Teorema})}{\Longrightarrow} \lim a_{2n+1} = 0$

Exemplos

1. Série harmônica alternada:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Neste caso, $a_n = \frac{1}{n}$

(i) $a_{n+1} < a_n$? Sim, pois $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, $\forall n$.

(ii) $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$

Logo, a série harm. alternada é convergente

Curiosidade: $\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = \ln 2}$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{4n-1} = -\frac{3}{3} + \frac{6}{7} - \frac{9}{11} + \frac{12}{15} \dots$$

$a_n = \frac{3n}{4n-1}$ $(\geq 0, \forall n)$

(ii) $\lim a_n = \lim \frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}(4 - \frac{1}{n})} = \frac{3}{4}$. $(\neq 0)$

Conclusão: não podemos usar o Critério das S. Alternadas

$b_n = (-1)^n \frac{3n}{4n-1}$ $\qquad \lim b_n$ não existe

pois $\lim b_{(2n-1)} = -\frac{3}{4}$ e $\lim b_{2n} = +\frac{3}{4}$

Pelo critério do Termo Geral, a série é divergente.

3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n-1}} \underbrace{\frac{n^2}{n^3+1}}_{>0}$

Trata-se de uma série alternada

$$\boxed{a_n = \frac{n^2}{n^3+1}}$$

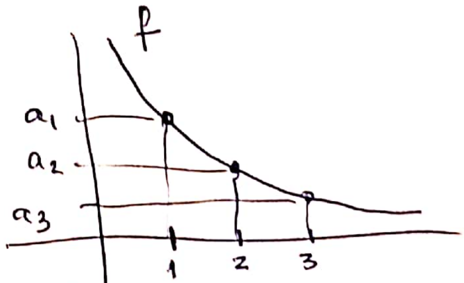
(ii) $\lim a_n = \lim \dfrac{n^2}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \lim \dfrac{1}{n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} =$

$\overset{(*)}{=} \lim \dfrac{1}{n} \cdot \lim \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^3}} = 0 . 1 = 0.$ ✓

pois $\begin{cases} \lim \frac{1}{n} = 0 \\ \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} = 1 \end{cases}$

(i) (a_n) é decrescente?

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}, \quad x \geq 1$



$f'(x) = \dfrac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$ (verificar!)

$f'(x) < 0$ se $x \geq 2$.

$a_{n+1} = f(n+1) < f(n) = a_n, \quad \forall\, n \geq 2$

Teorema $\Rightarrow$ a série alternada converge.