3.3 Geodésicas e constantes de movimento

Com a liberdade que ganhamos de adotar sistemas de coordenadas arbitrários x^μ — e, em particular, referenciais arbitrários de onde analisar os fenômenos físicos —, a primeira providência é obter as equações horárias $x^j(x^0)$ que representam linhas-de-mundo inerciais nessas coordenadas. Essas equações horárias, que são extremamente simples em coordenadas cartesianas inerciais (representando movimentos retilíneos e uniformes), podem assumir formas bastante complexas em coordenadas arbitrárias. Uma maneira simples de convencer o(a) leitor(a) disso é voltar para o plano euclidiano bidimensional e retratar, num diagrama $(r, \theta) \in \mathbb{R}^*_+ \times [0, 2\pi)$ (de coordenadas polares) a "forma" de linhas retas geométricas; vide **Fig. 3.5**.

Como vimos no último exercício da seção anterior, a 4-aceleração de uma linha-de-mundo com 4-velocidade u^a é dada por $a^a = u^b \nabla_b u^a$. Logo, as linhas retas, chamadas genericamente de *geodésicas*, são as curvas $x^\mu(\lambda)$ cujo 4-vetor tangente tem componentes $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ satisfazendo[9]

$$u^b \nabla_b u^a = 0 \Leftrightarrow \frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0.$$

- **Exercício:** Considere o espaço-tempo de Minkowski coberto com coordenadas cilíndricas inerciais $\{x^\mu\} := \{(ct, r, \theta, z)\}$, cujo elemento de linha associado é (cerifique-se de que você entende o porquê)

  $$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.$$

  Nessas coordenadas, considere uma linha-de-mundo inercial dada por $x^\mu(\lambda)$. Usando a forma explícita da equação da geodésica nessas coordenadas, pede-se:

  (a) Mostre que $u^z := dz/d\lambda = \text{constante}$;

[9] Mais genericamente, uma geodésica apenas precisaria satisfazer $u^b \nabla_b u^a \propto u^a$. Porém, uma curva que satisfaz essa equação sempre pode ser reparametrizada de modo que o novo vetor tangente satisfaça $u^b \nabla_b u^a = 0$. Os parâmetros que fazem com que as geodésicas satisfaçam essa última equação são chamados de *parâmetros afins* — dos quais o *tempo-prórpio* é um exemplo (entenda o porquê).

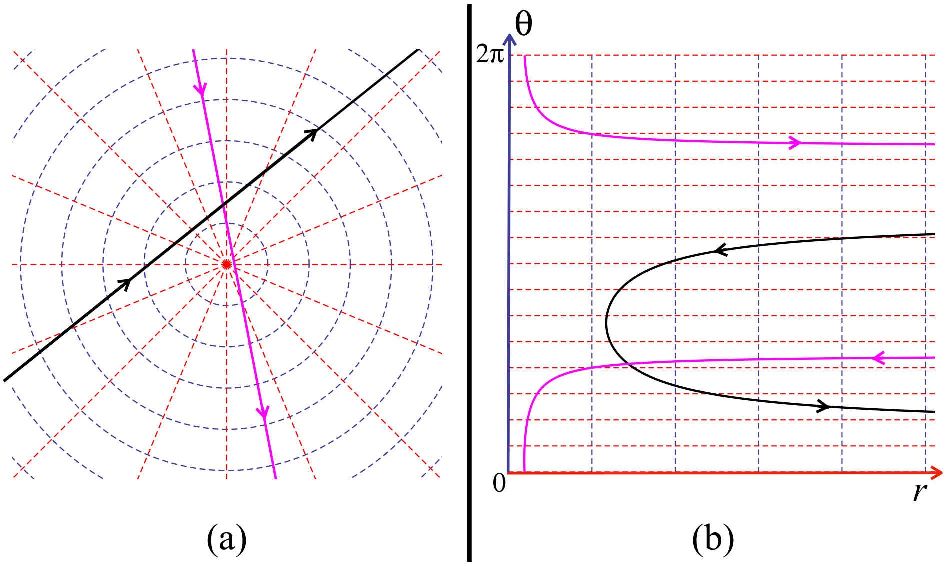

Figura 3.5: (a) Plano euclidiano retratado privilegiando-se a estrutura geométrica subjacente, de modo que linhas retas pareçam retas. Representamos, também, as linhas coordenadas do sistema polar $\{(r, \theta)\} = \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)$. (b) Representação do mesmo plano euclidiano, mas privilegiando as coordenadas polares. Nesse diagrama, as retas geométricas ficam distorcidas. Se essas curvas representassem trajetórias de partículas livres, nessas coordenadas teríamos que postular a existência de uma "força fictícia" para explicar, por exemplo, porque essas trajetórias parecem repelidas pela origem $r = 0$ — que é exatamente o papel do chamado "potencial centrífugo", comum quando analisamos problemas de mecânica (clássica ou quântica) em coordenadas polares, cilíndricas ou esféricas.

(b) Mostre que $r^2 u^\theta := r^2 d\theta/d\lambda =$ constante;

(c) Mostre que

$$(u^r)^2 + \frac{\ell^2}{r^2} = \text{constante},$$

onde $u^r := dr/d\lambda$ e $\ell := r^2 u^\theta$ é a constante do item anterior. Discuta como essa expressão pode ser usada para explicar o comportamento das curvas da **Fig. 3.5(b)**.

Como era de se esperar — por toda a discussão relacionada à lei da inércia da Seção 1.3 —, a equação da geodésica, em coordenadas arbitrárias, é um conjunto de equações diferenciais acopladas de primeira ordem nas componentes u^μ. Mas vimos, do exercício acima, que elas podem implicar em algumas leis de conservação, pelas quais uma ou mais funções $\mathcal{F}(u^\mu)$ das componentes u^μ (*sem* envolver suas derivadas) são mantidas constantes ao longo da linha-de-mundo inercial.

Essas *constantes de movimento*, quando existem, são úteis, pois facilitam a tarefa de se encontrar as soluções da equação da geodésica, dadas condições iniciais (a partir das quais os valores das constantes de movimento são determinados). No entanto, nem sempre a obtenção dessas leis é imediata, pois envolve manipular as equações de movimento de modo a obter $d\mathcal{F}(u^\mu)/d\lambda = 0$, para alguma função $\mathcal{F}$. Seria interessante, então, se houvesse alguma "receita" geral que facilitasse a identificação de ao menos alguma(s) dessas constantes de movimento. Felizmente, uma "receita" dessas existe, pelo menos em algumas situações especiais, como veremos a seguir.

Suponha que exista um campo covetorial ξ_a satisfazendo a seguinte equação diferencial, denominada *equação de Killing*:

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0. \tag{3.18}$$

Se um campo assim existir, note que a quantidade $\xi_a u^a$ é uma constante de movimento *se* u^a satisfizer a equação da geodésica, pois:

$$\frac{d}{d\lambda}(\xi_a u^a) = u^b \nabla_b (\xi_a u^a) = \xi_a u^b \nabla_b u^a + u^a u^b \nabla_b \xi_a = 0$$

$$\Longrightarrow \xi_a u^a = \text{constante},$$

onde a última parcela da primeira linha acima se anula graças à Eq. (3.18) (certifique-se de que você entende o porquê). Sendo assim, a cada campo covetorial satisfazendo a Eq. (3.18) — cujo campo 4-vetorial associado, $\xi^a = g^{ab}\xi_b$, é denominado *campo de Killing* —, existe uma quantidade conservada para o movimento inercial.

Resta, então, a tarefa de encontrar os campos de Killing — ou seja, resolver a Eq. (3.18) — para, então, se construir as constantes de movimento. Num espaço-tempo genérico essa tarefa pode ser bastante complicada; ou pior: num espaço-tempo genérico a Eq. (3.18) pode não ter nenhuma solução. Felizmente, o espaço-tempo de Minkowski é um exemplo de espaço-tempo no qual a Eq. (3.18) possui o maior número possível de soluções independentes (dez, no total). Mas sem entrar em detalhes de quais são essas soluções, no momento, o exercício a seguir fornecerá um guia simples para encontrar algum(uns) desses campos de Killing, uma vez conhecendo-se o elemento de linha nas coordenadas em questão.

- **Exercício:** Seja x^μ um sistema de coordenadas arbitrário e seja $g_{\mu\nu}$ as componentes da métrica na base associada. Então:

  (a) Mostre que se nenhuma das componentes $g_{\mu\nu}$ depender de uma das coordenadas, digamos $x^{\bar{\alpha}}$ — ou seja, $\partial_{\bar{\alpha}} g_{\mu\nu} = 0$

para todos os possíveis valores de μ e ν —, então o elemento associado da base coordenada é um campo de Killing — ou seja, $\xi^a = \partial^a_{\bar{\alpha}}$ satisfaz a Eq. (3.18);

(b) Com base no resultado acima e na forma do elemento de linha em coordenadas cilíndricas inerciais, dada no exercício anterior, reobtenha as três constantes de movimento encontradas no exercício anterior.

⑥ Seja $\{(c\tau, \zeta^j)\}$ um sistema de coordenadas cartesiano uniformemente acelerado e seja v^a a 4-velocidade de uma partícula livre.

(a) Mostre, abrindo explicitamente a equação da geodésica em componentes, que a componente v_0 do covetor $v_a = g_{ab}v^b$, na base coordenada associada a $\{(c\tau, \zeta^j)\}$, é uma constante de movimento da partícula livre.

Agora, considere o campo 4-vetorial ξ^a cujas componentes nessas coordenadas são $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ (ou seja, $\xi^a = \partial_0^a$).

(b) Mostre que $\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$;

(c) Reobtenha o resultado do item (a) apenas analisando a equação que $\xi^a v_a$ satisfaz;

(d) Seguindo a mesma estratégia dos itens (b) e (c), tente encontrar mais duas constantes de movimento para a partícula livre.