1 Vetores Aleatórios Discretos

1.1 Distribuição Conjunta de Probabilidade

Modelos probabilísticos geralmente envolvem várias variáveis aleatórias. Aqui vamos nos concentrar no estudo de um par de variáveis aleatórias, não se esquecendo que os resultados obtidos para o caso bidimensional podem ser estendidos facilmente a um conjunto finito de variáveis aleatórias. A seguir temos a definição de vetor aleatório bidimensional.

Definição 1.1 *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Chamamos (X, Y) de vetor aleatório bidimensional, que será discreto se X e Y forem variáveis aleatórias discretas.*

Exemplo 1.1 *No contexto de diagnóstico médico, os resultados de diversos exames são significativos para o profissional médico descobrir que doença acomete seu paciente.*

Digamos que um paciente procure um médico com sintomas de cansaço e tontura. O médico pede um exame de sangue para verificar anemia e diabetes. Definamos:

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{se o paciente tiver anemia} \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \textit{se o paciente tiver diabetes} \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Nesse caso o par (X, Y) é uma vetor aleatório bidimensional.

Um vetor aleatório analogamente a uma variável aleatória unidimensional só fica determinado quando além de seus valores, mais precisamente as n-uplas assumidas, também são conhecidas as probabilidades com que essas n-uplas são assumidas. A definição de distribuição de probabilidade apresentada para uma v.a unidimensional pode ser estendida de maneira natural para uma vetor aleatório.

Definição 1.2 *(Distribuição de Probabilidade Conjunta).*

Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto, onde X assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e Y assume os valores $y_1, y_2, \ldots, y_m$. A cada par ordenado (x_i, y_j) associaremos uma probabilidade

$$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j),$$

satisfazendo:

1. $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \geq 0, \ \forall \ i, j;$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = 1.$

O conjunto de valores $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ forma a distribuição conjunta do vetor aleatório discreto (X, Y). Esses valores são normalmente apresentados em forma de tabela, tal como veremos nos exemplos abaixo.

Agora, considerando o exemplo 1.1, conseguimos responder algumas perguntas como: a pessoa pode ter as duas doenças?

Nesse caso os eventos de interesse são: $\{X = 1\}$ e $\{Y = 1\}$. Em palavras, queremos saber qual é a probabilidade da pessoa apresentar as duas doenças. Por meio da distribuição conjunta conseguimos encontrar essas probabilidades, ou seja, calculamos

$$\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1).$$

Isto é, obtemos com que probabilidade X e Y assumem conjuntamente (ao mesmo tempo) seus diversos valores. Podemos representar a distribuição conjunta usando uma tabela, como segue abaixo.

	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1)$	$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0)$
$Y = 1$	$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1)$	$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0)$

O próximo exemplo foi retirado do livro de Bussab e Morettin (2002).

Exemplo 1.2 *Suponha que estejamos interessados em estudar famílias compostas por 3 crianças. Definamos:*

$X =$ *número de meninos*

$$Y = \begin{cases} 1, & \textit{se o 1° filho for homem} \\ 0, & \textit{se o 1° filho for mulher} \end{cases}$$

$Z =$ *número de vezes em que houve variação do sexo entre um nascimento e outro, dentro da mesma família.*

Com essas informações, e supondo que cada composisão tenha a mesma probabilidade, obtemos na tabela abaixo a probabilidade de cada evento possível, onde H e M representam se o filho é homem ou mulher, respectivamente:

elementos de Ω	*Probabilidade*	X	Y	Z
HHH	*1/8*	*3*	*1*	*0*
HHM	1/8	2	1	1
HMH	1/8	2	1	2
MHH	1/8	2	0	1
HMM	1/8	1	1	1
MHM	1/8	1	0	2
MMH	1/8	1	0	1
MMM	1/8	0	0	0

Obtidos esses resultados podemos determinar qual é a distribuição conjunta do vetor aleatório (X, Y). Por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) &= \mathbb{P}(\{HHM, HMH\}) \\ &= \mathbb{P}(\{HHM\}) + \mathbb{P}(\{HMH\}) \\ &= 1/8 + 1/8 = 2/8 \end{aligned}$$

Seguindo esse mesmo procedimento para os demais pares ordenados assumidos por (X, Y), encontramos sua distribuição conjunta:

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	1/8	2/8	1/8	0
$Y=1$	0	1/8	2/8	1/8

Fica a cargo do leitor encontrar a distribuição conjunta do vetor (X, Z) e (Y, Z).

2 Distribuições Marginais

Consideramos anteriormente uma variável aleatória bidimensional (X, Y), onde X assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e Y assume os valores $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Seja $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$ a distribuição conjunta de (X, Y). Uma vez que tenhamos a distribuição de massa de probabilidade conjunta, podemos recuperar as distribuições de probabilidade de X e Y.

Vamos começar calculando a distribuição de probabilidade de X. Para isso, vamos usar o fato de uma variável aleatória determinar uma partição de Ω. A variável aleatória Y divide Ω em m subconjuntos (eventos):

$$\{Y = y_1\}, \{Y = y_2\}, \{Y = y_3\}, \cdots, \{Y = y_m\},$$

que são disjuntos, e cuja união resulta em ω. Como vimos no Capítulo 1, essas características definem uma partição de Ω, com a qual podemos decompor quaisquer outros eventos de Ω, na união de eventos disjuntos. Podemos, então, reescrever o evento $\{X = x_i\}$, como segue abaixo:

$$\{X = x_i\} = (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\}) \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_2\}) \cdots \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_m\}).$$

Aplicando-se a função de probabilidade em ambos aos lados temos:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}((\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\}) \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_2\}) \cdots \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_m\})).$$

Como os eventos são disjuntos, usamos o Axioma 3:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\}) + \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_2\}) + \cdots + \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_m\}),$$

que podemos reescrever usando a notação mais concisa:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_1) + \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_2) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_m).$$

Portanto, a distribuição de probabilidade de X é obtida calculando-se para $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Ela é denominada distribuição marginal de X.

A distribuição marginal de Y é calculada de modo análogo. Então para $j = 1, 2, \ldots, m$, temos que

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Exemplo 2.1 *Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto. A distribuição conjunta de X e Y é dada pela tabela a seguir. Determine as suas distribuições marginais.*

	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=1$	0	1/5	0
$Y=2$	1/5	1/5	1/5
$Y=3$	0	1/5	0

Primeiramente vamos calcular a distribuição marginal de X:

$$\mathbb{P}(X=1)=\sum_{j=1}^{3}\mathbb{P}(X=1,Y=j)=\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=2)+\mathbb{P}(X=1,Y=3)=0+\frac{1}{5}+0=\frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\sum_{j=1}^{3}\mathbb{P}(X=2,Y=j)=\mathbb{P}(X=2,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=2)+\mathbb{P}(X=2,Y=3)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\sum_{j=1}^{3}\mathbb{P}(X=3,Y=j)=\mathbb{P}(X=3,Y=1)+\mathbb{P}(X=3,Y=2)+\mathbb{P}(X=3,Y=3)=0+\frac{1}{5}+0=\frac{1}{5}$$

Agora de forma análoga obtemos a distribuição marginal de Y:

$$\mathbb{P}(Y=1)=\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(X=i,Y=1)=\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=1)+\mathbb{P}(X=3,Y=1)=0+\frac{1}{5}+0=\frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(Y=2)=\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(X=i,Y=2)=\mathbb{P}(X=1,Y=2)+\mathbb{P}(X=2,Y=2)+\mathbb{P}(X=3,Y=2)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(Y=3)=\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(X=i,Y=3)=\mathbb{P}(X=1,Y=3)+\mathbb{P}(X=2,Y=3)+\mathbb{P}(X=3,Y=3)=0+\frac{1}{5}+0=\frac{1}{5}$$

3 Distribuições Condicionais

Quando trabalhamos com vetores aleatórios, é conveniente calcular proporções em relação a uma linha ou coluna da tabela de distribuição conjunta, e não em relação ao total. Assim, considerando novamente o exemplo 1.2, qual seria a distribuição do número de meninos, sabendo-se que o primeiro filho é do sexo masculino? Ou seja, queremos calcular a probabilidade $\mathbb{P}(\{X=x\}|\{Y=1\})=\mathbb{P}(X=x|Y=1)$. A partir da definição de probabilidade condicional, obtemos

$$\mathbb{P}(X=x|Y=1)=\frac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=1\})}{\mathbb{P}(\{Y=1\})}=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)}, x=0,1,2,3.$$

Usamos $p_{X|Y}(x,y)$ para denotar a probabilidade condicional dos valores de X dado um valor de Y.
De forma geral podemos definir a distribuição condicional de duas variáveis aleatórias da seguinte forma:

Definição 3.1 *Seja (X,Y) um vetor aleatório discreto. A probabilidade condicional de $\{X=x\}$, dado que $\{Y=y\}$ ocorreu, é dada pela expressão:*

$$p_{X|Y}(x,y)=\mathbb{P}(X=x|Y=y)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}, \textit{se } \mathbb{P}(Y=y)>0.$$

Definimos a probabilidade condicional de $Y = y$, dado que $X = x$ ocorreu, da mesma forma. Logo temos que

$$p_{Y|X}(y, x) = \mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

As mesmas condições impostas a $\mathbb{P}(Y = y)$ para o cálculo de $\mathbb{P}(X = x|Y = y)$ são transferidas à $\mathbb{P}(X = x)$ para determinar $\mathbb{P}(Y = y|X = x)$.

A seguir temos outro exemplo retirado de Bussab e Morettin (2002).

Exemplo 3.1 *Num estudo de rotatividade de mão-de-obra, foram definidas para certa população de trabalhadores as variáveis aleatórias:*

- $X =$ *número de empregos que um funcionário teve ao mesmo tempo no último ano*
- $Y =$ *salário*

Obteve-se a seguinte distribuição conjunta:

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = 800$	0	0	0.10	0.10
$Y = 1200$	0.05	0.05	0.10	0.10
$Y = 2000$	0.05	0.20	0.05	0
$Y = 5000$	0.10	0.05	0.05	0

A partir dessas informações queremos estudar a distribuição do número de empregos de cada trabalhador no último ano, dado que o sálario foi de 5000 *reais, isto é, queremos estudar a distribuição de probabilidade de X dado que $\{Y = 5000\}$:*

$$\mathbb{P}(X = x|Y = 5000) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = 5000)}{\mathbb{P}(Y = 5000)}.$$

Da última linha da tabela obtemos as probabilidades conjuntas de interesse, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 5000), \mathbb{P}(X = 2, Y = 5000), \mathbb{P}(X = 3, Y = 5000)$ e $\mathbb{P}(X = 4, Y = 5000)$. Dividindo-se essas probabilidades por $\mathbb{P}(Y = 5000)$, que está na margem da tabela, obtemos a probabilidade condicional $\mathbb{P}(X = x|Y = 5000)$:

$$p_{X|Y}(1, 5000) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 5000)}{\mathbb{P}(Y = 5000)} = \frac{0.10}{0.20} = \frac{1}{2}$$

$$p_{X|Y}(2, 5000) = \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = 5000)}{\mathbb{P}(Y = 5000)} = \frac{0.05}{0.20} = \frac{1}{4}$$

$$p_{X|Y}(3, 5000) = \frac{\mathbb{P}(X = 3, Y = 5000)}{\mathbb{P}(Y = 5000)} = \frac{0.05}{0.20} = \frac{1}{4}$$

$$p_{X|Y}(4, 5000) = \frac{\mathbb{P}(X = 4, Y = 5000)}{\mathbb{P}(Y = 5000)} = \frac{0}{0.20} = 0$$

Os resultados obtidos podem ser verificados de forma simplificada, na tabela abaixo:

X	1	2	3	4
$p_{X|Y}$	1/2	1/4	1/4	0

Por meio da amostra escolhida, conclui-se que metade das pessoas que possuem salários de 5000 *reais, só tiveram um emprego e a outra metade é representada por pessoas que tiveram 2 ou 3 empregos.*

Considere a distribuição condicional de X, dado que $Y = 5000$, apresentada no exemplo 3.1. Podemos calcular a média dessa distribuição, a saber

$$\mathbb{E}(X|Y = 5000) = 1(1/2) + 2(1/4) + 3(1/4) + 4(0).$$

De modo geral, dada a probabilidade condicional $\mathbb{P}(X|Y = y)$, podemos calcular a esperança de X dada essa nova distribuição de probabilidade. Apresentamos isso na seguinte definição:

Definição 3.2 *A esperança de X, dado que $Y = y$, é definida por*

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; \mathbb{P}(X = x_i|Y = y).$$

Uma definição análoga vale para $\mathbb{E}(Y|X = x)$.

4 Independência

Intuitivamente a independência de X em relação a Y significa: "seja qual for o valor que Y assuma, isso não influencia no fato de X assumir quaisquer de seus valores ".

Os conceitos envolvidos na independência de variáveis aleatórias são os mesmos já vistos para eventos independentes.

Definição 4.1 *Dizemos que duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se*

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(X = x),$$

para todo $x \in I_X$ e $y \in I_Y$. O que implica em:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y) = p_X(x) \cdot p_Y(y),$$

para todo $x \in I_X$ e $y \in I_Y$.

Observações:

1. a definição acima é equivalente a dizer que os eventos $\{X = x\}$ e $\{Y = y\}$ são independentes para todo $x \in I_X$ e todo $y \in I_Y$.

2. relembrando que $p_{X|Y}(x|y) = \dfrac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$. Então quando X e Y forem independentes temos que $p_{X|Y}(x|y) = \dfrac{p_X(x)\; p_Y(y)}{p_Y(y)} = p_X(x)$ para todo y com $p_Y(y) > 0$ e todo x.

Exemplo 4.1 *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, cuja distribuição conjunta é dada por*

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{x + y}{21}, \; x = 1, 2, 3 \text{ e } y = 1, 2.$$

Vamos determinar se X e Y são independentes.

Temos que verificar se $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x).\; p_Y(y)$. O primeiro passo é encontrar as distribuições marginais $p_X(x)$, para $x = 1, 2, 3$ e $p_Y(y)$, para $y = 1, 2$:

- $p_X(x) = \displaystyle\sum_{y=1}^{2} p_{X,Y}(x, y) = \sum_{y=1}^{2} \frac{x + y}{21} = \frac{x + 1}{21} = \frac{2x + 3}{21}$

- $p_Y(y) = \sum_{x=1}^{3} p_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x+y}{21} = \frac{1+y}{21} + \frac{2+y}{21} + \frac{3+y}{21} = \frac{6+3y}{21}$

Encontrado as distribuições marginais de X e Y, podemos substituir valores para verificar se a igualdade acima é satisfeita, pois se existir pelo menos um par (x,y), tal que $p_{X,Y}(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$, X e Y não serão independentes.

Então, testando para $x = 1$ e $y = 1$, temos que:

$$p_{X,Y}(1,1) = \frac{2}{21} \neq p_X(1)p_Y(1) = \frac{45}{21}.$$

Portanto, as variáveis aleatórias X e Y não são independentes.

A independência de variáveis aleatórias implica também em outros resultados, um deles é mostrado na definição abaixo.

Lema 4.1 *Se X e Y forem variáveis aleatórias independentes, então*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

A demonstração deste lema é vista facilmente:

Suponhamos que a distribuição conjunta de (X,Y), seja dada por $p_{X,Y}(x_i, y_j)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$, então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \ p_{X,Y}(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \ p_X(x_i) p_Y(y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \ p_X(x_i) \ \sum_{j=1}^{m} y_j \ p_Y(y_j) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

5 Covariância

[1] Seja (X,Y) um vetor aleatório discreto. Vimos até aqui que as esperanças de X e Y nos fornecem uma medida de posição das respectivas distribuições nos respectivos eixos da coordenada do plano. E as variâncias de X e de Y dão uma medida da dispersão dos valores de cada variável aleatória em torno das respectivas médias $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(Y)$.

A covariância, que definiremos a seguir, fornece a medida de dispersão dos valores das variáveis aleatórias (X,Y) em relação ao ponto $(\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))$.

Definição 5.1 *Seja (X,Y) um vetor aleatório. A covariância entre X e Y é definida por*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

Em palavras, a covariância de X e Y é o valor médio do produto dos desvios dos valores de cada uma das duas variáveis aleatórias em relação a suas médias. Isso implica que,

- $Cov(X,Y) > 0 : X$ e Y são positivamente correlacionadas
- $Cov(X,Y) < 0 : X$ e Y são negativamente correlacionadas
- $Cov(X,Y) = 0 : X$ e Y não são correlacionadas

[1]Seguindo Dantas [?]

A fórmula da covariância pode ser escrita de uma forma mais simples. Note que

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)] \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

ou seja,

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Quando escrevemos a fórmula da covariância dessa maneira, fica fácil entender o próximo resultado.

Lema 5.1 *Se X e Y forem variáveis aleatórias independentes, temos que a $Cov(X,Y) = 0$.*

Em palavras, se X e Y forem independentes, então elas serão não-correlacionadas. Agora sabendo que X e Y são independentes, a esperança do produtos das variáveis é igual ao produto das esperanças, o que torna a demonstração do lema imediata.

A recíproca desse lema não é verdadeira, ou seja, se tivermos $Cov(X,Y) = 0$ isso não implica que X e Y sejam independentes.

6 Exercícios

Os Exercícios 1 e 2 são mais simples e diretos. Devem ser resolvidos para testar o entendimento dos conceitos.

1. Sejam X (valores na primeira linha) e Y (valores na primeira coluna) variáveis aleatórias com a seguinte distribuição conjunta de probabilidades:

$Y/\ X$	1	2	3
1	2/36	2/36	3/36
2	1/36	10/36	3/36
3	4/36	5/36	6/36

   (a) Encontre as distribuições marginais de X e Y.

   (b) X e Y são independentes?

   (c) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$.

   (d) Encontre a distribuição condicional de X dado $Y = 2$.

   (e) Calcule $\mathbb{E}(X|Y = 2)$.

   (f) Calcule $\mathbb{E}(X + Y)$.

   (g) Calcule $Var(X + Y)$.

   (h) Calcule $Cov(X,Y)$.

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias com a seguinte distribuição conjunta de probabilidades:

Y/ X	0	1	2	3
1	1/8	1/16	3/16	1/8
2	1/16	1/16	1/8	1/4

   (a) Encontre as distribuições marginais de X e Y.
   (b) X e Y são independentes?
   (c) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$.
   (d) Encontre a distribuição condicional de Y dado $X = 3$.
   (e) Calcule $\mathbb{E}(Y|X = 3)$.
   (f) Calcule $\mathbb{E}(X + Y)$.
   (g) Calcule $Var(X + Y)$.
   (h) Calcule $Cov(X, Y)$.

Exercícios de dificuldade média. Devem ser resolvidos para conseguirem resolver o próximo grupo de exercícios, e também por que estão no nível que será pedido em parte das provinhas.

3. Lançam-se uma moeda e um dado honestos. Seja X a v.a. que conta o número de caras obtidas, e seja Y o número de vezes que sai a face 1 do dado.
   (a) Exiba o espaço amostral.
   (b) Exiba todos os pares ordenados que o vetor (X, Y) assume.
   (c) Monte a tabela da distribuição conjunta de X e Y.
   (d) Encontre a distribuição de X.
   (e) Calcule a $\mathbb{E}(X)$ e a $Var(X)$.
   (f) Encontre a distribuição de Y.
   (g) Calcule a $\mathbb{E}(Y)$ e a $Var(Y)$.
   (h) X e Y são independentes? (justifique sua resposta)
   (i) Calcule $Cov(X, Y)$.

4. Considere uma urna com três bolas brancas e duas vermelhas. Retiram-se duas bolas da urna, uma após a outra, sem reposição. Defina a v.a X igual a 1 se a primeira bola retirada for branca, e igual a 0 se esta for vermelha. Analogamente, defina Y igual a 1 se a segunda bola for branca, e 0 se for vermelha.
   (a) Exiba o espaço amostral.
   (b) Exiba todos os pares ordenados que o vetor (X, Y) assume.
   (c) Encontre a distribuição conjunta de X e Y e a exiba em uma tabela.
   (d) Encontre a distribuição de X.

(e) Calcule a $\mathbb{E}(X)$ e a $Var(X)$.

(f) Encontre a distribuição de Y.

(g) Calcule a $\mathbb{E}(Y)$ e a $Var(Y)$.

(h) X e Y são independentes? (justifique sua resposta)

(i) Calcule $Cov(X, Y)$.

Exercícios mais desafiadores. Devem ser resolvidos pois estarão no nível de parte das provinhas.

5. Considere três moedas distintas. Para a moeda 1, a probabilidade de sair cara é 0.6. Para a moeda 2, a probabilidade de sair cara é 0.2. Para a moeda 3, a probabilidade de sair cara é 0.4. A moeda 1 é lançada. Seja X a variável aleatória que assume 1 se saiu cara e 0 se saiu coroa. Agora, se saiu cara, lance a moeda 2, e se saiu coroa, lance a moeda 3. Seja Z a variável aleatória que assume 1 se saiu cara nesse segundo lançamento e 0 se saiu coroa. Encontre:

   (a) as distribuições condicionais de probabilidade da variável aleatória Z dado a variável aleatória X.

   (b) a partir das distribuições condicionais de Z dado X, encontre a distribuição de probabilidade de Z.

   (c) a distribuição de probabilidade conjunta de X e Z.

   (d) a $\mathbb{E}(Z|X = 0)$.

6. Considere um dado honesto de 6 faces. Sejam X a variável aleatória que assume o resultado de um lançamento e Y a v.a que assume o número de caras do lançamento de X moedas honestas.

   a) Encontre as distribuições condicionais de Y dado X.

   b) A partir do item a) encontre a distribuição conjunta de X e Y.

   c) A partir do item a) encontre a distribuição marginal de Y.

   Dica: observe que a distribuição marginal de X está implicitamente dada no enunciado.

7. Dois dados honestos são lançados. Seja U a variável aleatória que assume o valor mínimo dos lançamentos. E seja V a variável aleatória que assume o valor máximo dos lançamentos.

   a) Encontre a distribuição conjunta de U e V.

   b) Encontre as distribuições condicionais de U e V.

   c) A partir dos resultados obtidos no item b), encontre a distribuição de U, supondo que você saiba a distribuição marginal de V.

   d) Encontre as esperanças condicionais de U dado V.

   e) A partir dos resultados obtidos em d) e supondo que a distribuição marginal de V seja conhecida, encontre $\mathbb{E}(U)$.

8. Seja o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e considere A e B dois eventos independentes, a partir dos quais definimos as seguintes variáveis aleatórias.

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A, \\ 0, & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

$$\mathbb{I}_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in B, \\ 0, & \text{se } \omega \notin B. \end{cases}$$

   (a) Encontre a distribuição de probabilidade conjunta do vetor aleatório $(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)$ em função de $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$.

   (b) Encontre também a distribuição condicional de probabilidade $p_{X|Y}(x|y)$.

9. Considere uma urna com 3 bolas numeradas de 2 a 4. Uma bola é escolhida aleatoriamente. Seja X a variável aleatória que assume o número impresso na bola. Agora, considere um dado honesto que é lançado X vezes. Seja Y a variável aleatória que assume o número de vezes que sai o número 4. Encontre:

   (a) as distribuições condicionais de Y dado X.

   (b) a distribuição conjunta de probabilidade de X e Y.

10. Seja (X, Y) um vetor aleatório bidimensional, mostre que

   a) Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+ 2Cov(X,Y).

   b) Var(X - Y)=Var(X)+Var(Y) - 2Cov(X,Y).