3.2 Símbolo de Christoffel e derivada covariante

A estrutura afim de $\mathbb{M}$ (que permitiu identificar todos os espaços tangentes, $\mathbb{V}_p = \mathbb{V}$) torna bem posta a tarefa de comparar 4-vetores em eventos diferentes, como já vínhamos fazendo. Fixada uma base (qualquer) de $\mathbb{V}$, essa tarefa se resume a comparar as componentes dos 4-vetores. No entanto, agora que introduzimos sistemas de coordenadas e bases coordenadas, estas últimas podendo variar ponto a ponto, comparar apenas as componentes de 4-vetores em eventos diferentes *não* basta para sabermos a relação entre eles; temos que saber, também, como as bases nesses eventos se relacionam. Em particular, o mesmo vale quando os eventos são arbitrariamente próximos e, por isso, calcular derivadas de 4-vetores (e de tensores, em geral) não se resume a calcular as derivadas de suas componentes.

Consideremos um *campo* 4-vetorial u^a definido em $\mathbb{M}$ — ou seja, $u^a : \mathbb{M} \to \mathbb{V}$ — e seja $x^\mu(\lambda)$ as coordenadas de uma curva qualquer em

$\mathbb{M}$, com 4-vetor tangente $v^a = (dx^\mu/d\lambda)\partial^a_\mu =: v^\mu \partial^a_\mu$. A taxa com que u^a varia ao longo da curva é dada por

$$\begin{aligned} \frac{du^a}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda}\left(u^\mu \partial^a_\mu\right) = \frac{du^\mu}{d\lambda}\partial^a_\mu + u^\mu \frac{d}{d\lambda}\left(\partial^a_\mu\right) \\ &= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\left[\partial_\nu u^\mu\, \partial^a_\mu + u^\mu\, \partial_\nu(\partial^a_\mu)\right]. \end{aligned}$$

Vemos da expressão acima que, para completar o cálculo, precisamos saber como os elementos da base coordenada variam ao longo das curvas coordenadas. Vamos codificar essa informação nos chamados *símbolos de Christoffel* $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, definidos através de

$$\partial_\nu(\partial^a_\mu) := \frac{\partial^2 s^a}{\partial x^\nu \partial x^\mu} =: \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial^a_\alpha. \tag{3.13}$$

Em palavras, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ é a α-ésima componente do 4-vetor que fornece a taxa de variação do μ-ésimo elemento da base coordenada na direção da ν-ésima curva coordenada.

- **Exercício:** Usando a definição dada pela Eq. (3.13) e as Eqs. (3.9–3.11), calcule todos os coeficientes $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ não nulos associados às coordenadas cartesianas uniformemente aceleradas.

Substituindo a Eq. (3.13) na manipulação mais acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{du^a}{d\lambda} &= v^\alpha\left(\partial_\alpha u^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, u^\beta\right)\partial^a_\mu \\ &= (v^\sigma \partial^b_\sigma)\left[\left(\partial_\alpha u^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, u^\beta\right)\mathbf{dx}^\alpha_b \partial^a_\mu\right] =: v^b \nabla_b u^a, \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde $\nabla_b u^a$ é um tensor de posto $(1,1)$ definido pela igualdade acima, válida para qualquer v^a.[8] Na verdade, o procedimento acima pode ser estendido para qualquer *campo* tensorial de posto (m,n), de modo a definir o operador *derivada covariante* ∇_a, que mapeia campos tensoriais $T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n}$ de posto (m,n) em campos tensoriais $\nabla_c T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n}$ de posto $(m, n+1)$, por

$$\frac{d}{d\lambda} T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n} =: v^c \nabla_c T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n}, \tag{3.15}$$

válido para qualquer $v^a = (dx^\mu/d\lambda)\partial^a_\mu$. Os exercícios abaixo levarão à forma explícita da atuação de ∇_a em termos de componentes.

[8] É comum se usar ∂_a — com índice abstrato, ao invés de concreto — para denotar o que aqui denotamos por ∇_a. Mas nossa intenção aqui é evitar confusões, como a de se achar que as componentes de $\partial_b u^a$ seriam dadas apenas por $\partial_\nu u^\mu$. Por outro lado, a motivação das referências que usam ∂_a é deixar claro que esse operador é *o único* operador de derivação compatível com a estrutura afim de $\mathbb{M}$ — ou, equivalentemente, com a métrica de Minkowski — e, portanto, é o *mesmo operador* que em coordenadas cartesianas inerciais é dado por ∂_μ, mas expresso em coordenadas genéricas. Essas mesmas referências reservam a notação ∇_a para operadores de derivação associadas a métricas mais gerais.

- **Exercício:** A partir da Eq. (3.13) e da definição de base dual, mostre que

$$\partial_\nu(\mathbf{dx}^\mu_a) = -\Gamma^\mu_{\sigma\nu}\mathbf{dx}^\sigma_a.$$

- **Exercício:** A partir da definição dada pela Eq. (3.15) e do resultado do exercício anterior, mostre que as *componentes* de $\nabla_c T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n}$ são dadas por

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_n} \quad := \quad & \partial_\sigma T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_n} + \Gamma^{\alpha_1}_{\rho\sigma} T^{\rho\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_n} + \ldots + \Gamma^{\alpha_m}_{\rho\sigma} T^{\alpha_1\ldots\rho}_{\beta_1\ldots\beta_n} \\ & -\Gamma^{\rho}_{\beta_1\sigma} T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\rho\ldots\beta_n} - \ldots - \Gamma^{\rho}_{\beta_n\sigma} T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\rho}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Num exercício anterior, vimos como utilizar a definição dada pela Eq. (3.13) para calcular os símbolos de Christoffel. Outra maneira — certamente, a mais utilizada — é dada pelo exercício a seguir:

- **Exercício:** Lembrando que se as componentes de um tensor são nulas em uma base, então são nulas em qualquer base — pois o tensor é nulo —, pede-se:

  (a) Mostre que $\nabla_c g_{ab} = 0$; (Sugestão: mostre isso em coordenadas cartesianas inerciais.)

  (b) Usando o resultado do item anterior e a Eq. (3.16), mostre que num sistema de coordenadas arbitrário, tem-se

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right); \tag{3.17}$$

  (c) Reobtenha os símbolos de Christoffel não nulos associados às coordenadas cartesianas uniformemente aceleradas, mas agora usando o resultado do item anterior e o elemento de linha dado pela Eq. (3.12).

Agora que sabemos como obter derivadas de tensores a partir de suas componentes em coordenadas arbitrárias, podemos voltar à questão que colocamos no final da seção anterior:

- **Exercício:** Sendo u^μ as componentes da 4-velocidade de observadores parados nas coordenadas cartesianas uniformemente aceleradas, obtidas na seção anterior, pede-se:

  (a) Calcule as componentes da 4-aceleração $a^a = du^a/d\tilde{\tau} = u^b\nabla_b u^a$ na respectiva base coordenada;

  (b) Calcule a aceleração própria associada.

Com a noção de derivada covariante e sua expressão em termos da Eq. (3.16) e da Eq. (3.17), finalmente nos libertamos de fazer menção explícita constante à estrutura afim de $\mathbb{M}$ — ou, fisicamente, a famílias de observadores inerciais. Dado um sistema de coordenadas genérico (que pode ou não estar associado a uma família de observadores), tudo que precisamos é do elemento de linha expresso nessas coordenadas.

Esse exercício já foi incluído nas notas de aula anteriores. É reproduzido aqui apenas porque o exercício 5, a seguir, faz menção a ele.

④ Numa tentativa de construir um sistema de coordenadas cartesiano acelerado o mais análogo possível ao sistema cartesiano inercial, um aluno optou por substituir a coordenada τ — que representa o tempo físico apenas dos observadores em $\zeta^1 = 0$ — pela coordenada $\widetilde{\tau} := (1 + a_0\zeta^1/c^2)\tau$ — que é o tempo físico de cada observador parado nesse sistema de coordenadas. A esperança desse aluno era de que, ao utilizar apenas distâncias e tempo físicos como coordenadas, o elemento de linha assumiria a mesma forma que em coordenadas cartesianas inerciais, Eq. (3.6), havendo, assim, uma completa simetria entre esses sistemas de coordenadas.

(a) Obtenha a matriz jacobiana de transformação de coordenadas $(c\tau, \zeta^j) \mapsto (c\widetilde{\tau}, \zeta^j)$;

(b) Represente a base coordenada associada a $(c\widetilde{\tau}, \zeta^j)$ em termos da associada a $(c\tau, \zeta^j)$; (Sugestão: embora as coordenadas espaciais ζ^j sejam as mesmas em ambos os sistemas de coordenadas, denote-as por letras diferentes — por exemplo, $\widetilde{\zeta}^j$, com a condição de que $\widetilde{\zeta}^j = \zeta^j$. Ao final do processo você deve entender o porquê desse cuidado.)

(c) Calcule o elemento de linha nas coordenadas $(c\widetilde{\tau}, \zeta^j)$ e veja se o aluno conseguiu o que queria.

⑤ O aluno mencionado no exercício anterior, não se dando por vencido pelo insucesso daquela estratégia, resolve procurar por um sistema de coordenadas cuja base coordenada associada seria dada pela versão normalizada da base coordenada expressa nas Eqs. (3.9–3.11), obtendo assim uma tetrada. Com isso, garantidamente as componentes da métrica seriam dadas por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e, então, o elemento de linha tomaria a forma desejada, Eq. (3.6).

(a) Rescreva o lado esquerdo da Eq. (3.13) em termos da derivada covariante ∇_a;

(b) A partir da simetria de $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, decorrente de sua definição, mostre que se dois campos 4-vetoriais, u^a e v^a, são elementos de uma base coordenada de *algum* sistema de coordenadas, então $u^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b u^a = 0$;

(c) Com base no resultado anterior, mostre que a presente estratégia do aluno está, mais uma vez, fadada ao fracasso.