

3ª. Série de Problemas – Teoria de Filas · 2020
 Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

Questão 1

Modelo M/M/1 e afins.

Considerações Preliminares.

A partir do diagrama das taxas (instantâneas) de transição da fila M/M/1, é razoavelmente simples deduzir os diagramas das taxas (instantâneas) de transição para as cadeias de Markov em tempo contínuo das filas M/M/2 e M/M/3, em que o tempo de atendimento em cada um dos postos é exponencial com média $1/\mu$; tais diagramas são apresentados a seguir.

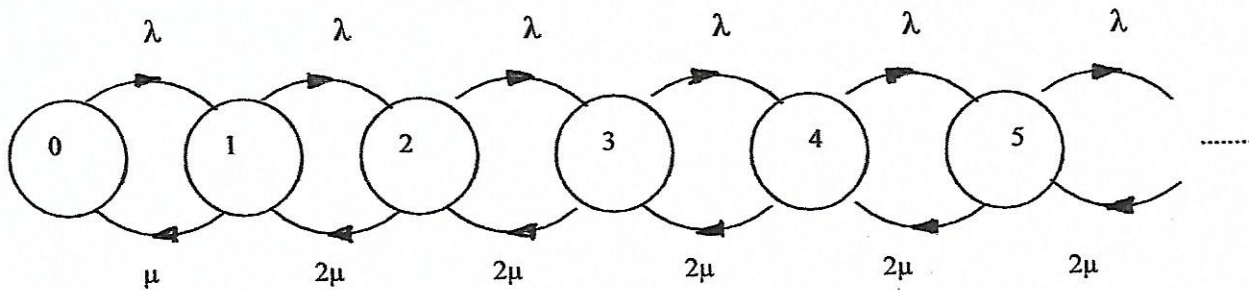


Diagrama das taxas de transição para a fila M/M/2

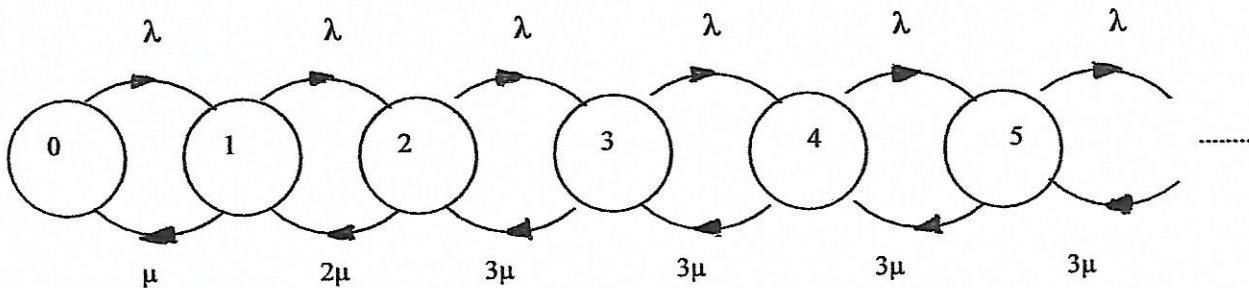


Diagrama das taxas de transição para fila M/M/3

Admita que você tenha de dimensionar o número de postos em paralelo para um sistema de serviço cuja demanda é Poisson, com taxa de chegada λ . O atendimento é exponencial com duas alternativas para o tempo médio, 5 minutos ou 7 minutos, dependendo do equipamento escolhido.

Os custos diários de instalação e operação do serviço, C , são calculados de acordo com a expressão:

$$C = 5N_p \times \left(\frac{1}{E(V)} \right)^2 + 40(N_p + \rho) \frac{1}{E(V)}$$

onde: N_p é o número de postos de serviço em paralelo, $E(V)$ é o tempo médio de atendimento, em horas, e ρ é o índice de congestionamento do sistema.

Admita os seguintes critérios de dimensionamento:

- a) minimizar os custos diários de instalação e operação, garantindo um tempo médio de permanência no sistema menor que 15 minutos;
- b) minimizar os custos diários de instalação e operação, garantindo que, com probabilidade 0,95, o número de clientes no sistema não supere 5;
- c) minimizar a soma dos custos diários de instalação e operação com os custos diários de permanência dos clientes no sistema, admitindo que o custo médio da hora dos clientes seja igual a 30.

Considerar três diferentes valores para λ : 8 clientes/hora, 12 clientes/hora e 15 clientes/hora. Discutir os resultados

Questão 2

Para atender a uma demanda com chegada Poisson, de taxa igual a 20 navios/semana, são apresentadas duas opções para um terminal marítimo:

- i) um único berço, com tempo de atendimento exponencial, de média igual a 7 horas;
 - ii) dois berços, cada qual com tempo de atendimento exponencial, de média igual a 14 horas;
- a) Como usuário, qual opção você escolheria? Utilize dois critérios para comparação. Admita que a taxa cobrada independe da opção selecionada.
 - b) Os dois sistemas não são aparentemente iguais? Por que um deles tem vantagem sobre o outro?

Questão 3

Considere a variante de fila M/M/1 para a qual a probabilidade de atendimento defeituoso é p .

- a) Construa o diagrama das taxas instantâneas de transição da cadeia de Markov em tempo contínuo associado a esta fila;
- b) Determine a distribuição de probabilidades estacionárias e a condição para a sua existência;
- c) Determine o tempo médio de atendimento de um cliente que passa por esta fila.

Questão 4

Em uma fábrica com 6 máquinas, a equipe de manutenção é composta por 2 homens (em cada turma de trabalho). O tempo de funcionamento de uma máquina qualquer recém-reparada até a próxima avaria é uma variável aleatória exponencial com média igual a 60 horas. [Isto é, a taxa de avaria, λ , de qualquer máquina é igual a $(1/60) h^{-1}$]. Os tempos de reparo, para qualquer máquina e atendida por qualquer elemento da equipe de manutenção, são variáveis aleatórias exponenciais com média igual a 24 horas. Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ o número de máquinas com avaria no instante t .

- a) Construa o diagrama das taxas (instantâneas de transição da cadeia de Markov em tempo contínuo $\{N(t), t \geq 0\}$;
- b) Calcule a probabilidade de que todas as máquinas estejam em operação num instante t (em regime estacionário);
- c) Também para o regime estacionário, determine a probabilidade de que não haja espera para o reparo de uma máquina.

Questão 5

Admita que uma operadora portuária decidiu entrar no mercado de contêineres na região sudeste. Ela já fez negociações preliminares com empresas de navegação e sabe que precisa de dois berços para atender a demanda prevista. Ela tem a possibilidade de conseguir a concessão de 2 berços contíguos em Santos ou um berço em Santos e outro em São Sebastião. Admita que, do ponto de vista dos custos para a operadora portuária e do

transporte terrestre, as duas alternativas sejam equivalentes. Falta examinar a qualidade do serviço oferecido às empresas de navegação, tendo em vista o tempo médio de permanência dos navios no terminal. Admitindo chegadas Poisson e atendimento exponencial nos terminais e que, no segundo caso, a demanda seja repartida igualmente entre os terminais de Santos e São Sebastião, que opção você escolheria? O tempo médio de atendimento em qualquer berço é $1/\mu$. Interprete os resultados.

Questão 6

Uma empresa petrolífera opera um terminal para descarregamento de navios petroleiros junto a uma de suas maiores refinarias. O terminal tem 4 berços, mas somente pode haver descarregamento simultâneo em 3 deles. Quando os berços estão lotados, os navios que chegam são encaminhados a um terminal secundário a 50 milhas de distância. Os petroleiros chegam ao terminal de acordo com um processo de Poisson de taxa $\lambda = 4$ navios/dia; o tempo de descarregamento é exponencial com média de 16 horas.

- Qual é o número médio de navios no terminal principal?
- Qual é o tempo médio de permanência no terminal principal?
- Qual é a taxa média de chegada ao terminal secundário?
- Qual é a probabilidade de que haja tempo de espera para um navio atendido no terminal principal ?

Questão 7

Considere a seguinte variante com relação à questão 4 acima
Problemas.

- Número total de máquinas: 10;
- Número de operadores de máquina por turno: 7;
- Número de equipes de reparo por turno: 3;
- Distribuição do tempo de operação de uma máquina; até a ocorrência de uma avaria: exponencial; com média igual a 120 horas;
- Distribuição do tempo de reparo de uma máquina: exponencial com média igual a 36 horas;
- Produção diária de uma máquina operando durante 24 horas: 200 peças.

Para estas condições determine:

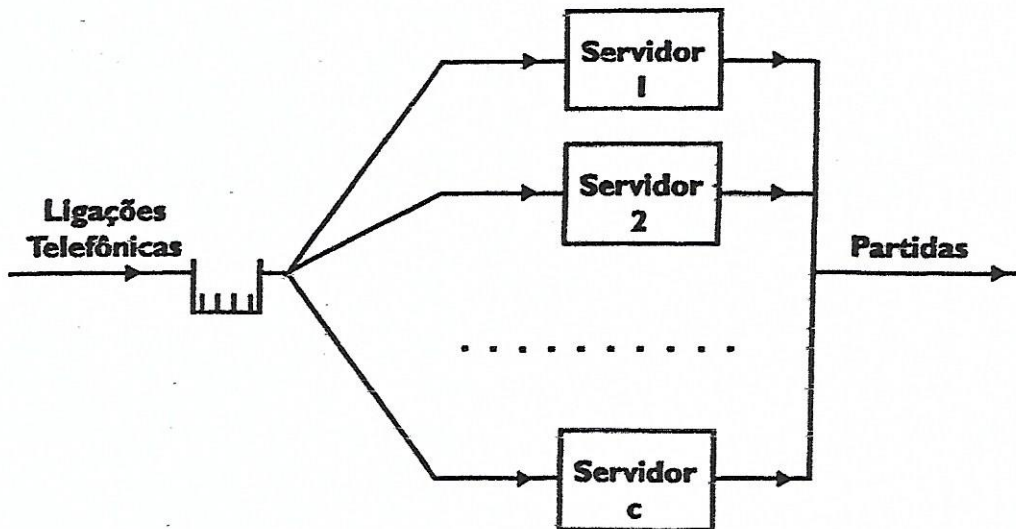
- Produção média diária da fábrica;
- Índice médio de ocupação dos operadores de máquina;
- Índice médio de ocupação das equipes de reparo.
- Admita, agora, que não pode haver operação com menos de 7 máquinas ativas; isto é, quando houver uma quebra e restarem apenas 6 máquinas ativas, há interrupção da operação da fábrica. O sistema volta a operar quando uma máquina for reparada. Compare a produção a média diária de fábrica dentro desta configuração de operação com o valor obtido no item (a).

Questão 8

Uma empresa de transporte aéreo planeja implantar uma nova central telefônica para reserva de passagens. Cada agente terá um terminal de computador e o tempo de atendimento de cada cliente é exponencial, com média igual a 5 minutos. As chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson, com taxa λ igual a 60 chamadas por

hora. O sistema tem capacidade para permitir que até 12 chamadas aguardem a disponibilidade de algum agente. A figura abaixo é uma representação esquemática deste processo. Caso a empresa opte por 6 terminais, calcule:

- A probabilidade de uma chamada encontrar todos os agentes ocupados;
- a probabilidade de que a caixa de espera esteja vazia.



Questão 9

Para uma fila M/M/1, com o máximo N-1 clientes em fila, determine a distribuição estacionária de probabilidades p_j , $j=0,1,\dots,N$, quando $\rho=1$. Interprete os resultados.

Questão 10

Considere uma fila M/M2, com parâmetros λ e μ tal que $\rho = \frac{\lambda}{2\mu} < 1$. Determine, em regime estacionário, a distribuição do tempo em fila para os clientes que esperam.

Questão 11

Considere a questão 6 acima. Tendo em vista os custos de encaminhar os navios para o terminal secundário quando todos os berços estão ocupados, a empresa está examinando duas alternativas para reduzir esses custos:

- contratação de uma quarta equipe de trabalho para cuidar da manipulação da tubulação para descarregamento dos navios;
- construção de um quinto berço para atracação dos navios.

Mostre como você resolveria a Questão 8 para cada uma dessas alternativas e discuta como utilizar os resultados do modelo de fila para avaliar a viabilidade econômica de cada alternativa.

Questão 12

Calcule a probabilidade de que um servidor da fila M/M/2 esteja ocupado. Compare com o mesmo resultado para a fila M/M/1.