

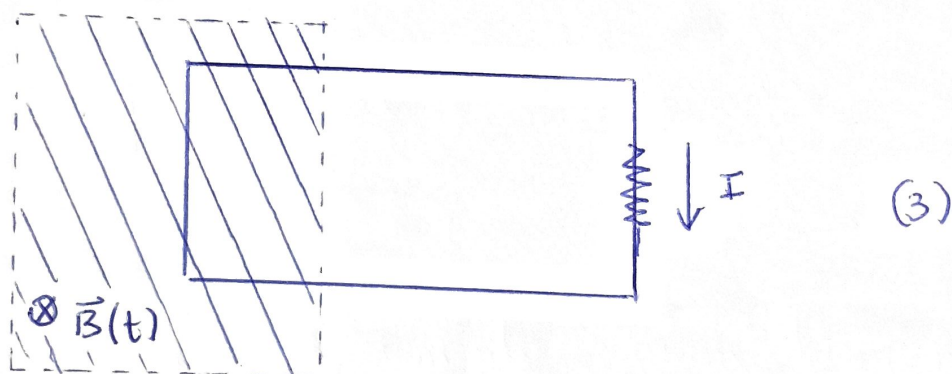
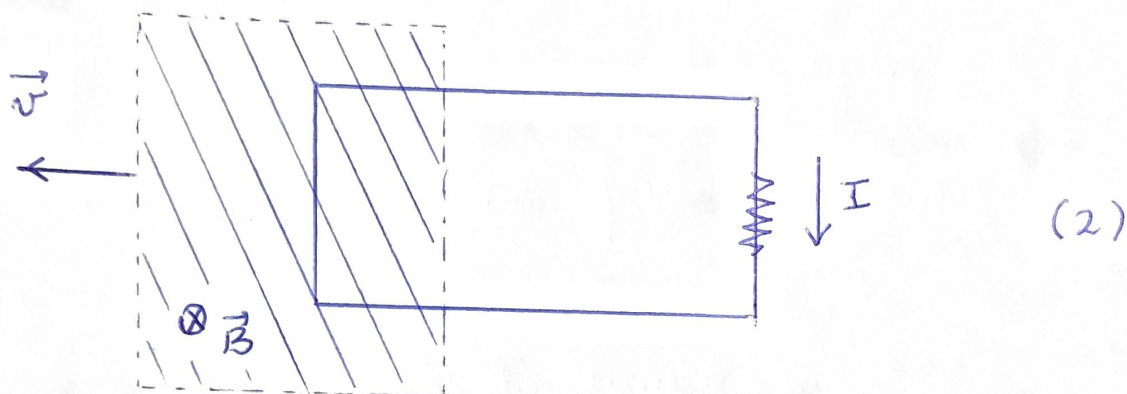
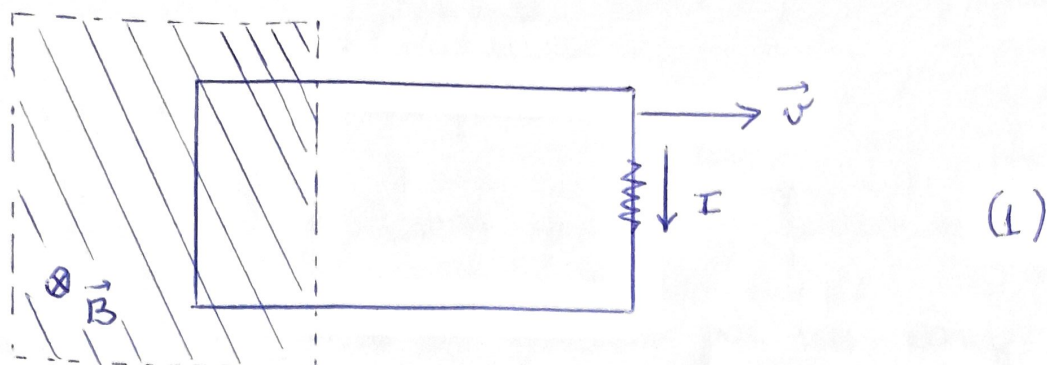
Indução eletromagnética

Na última aula vimos que ao movimentar um circuito fechado numa região de campo magnético $\vec{B}$, uma corrente elétrica flui pelo circuito devido a uma força eletromotriz de origem magnética.

Mostramos que essa força eletromotriz $\mathcal{E}$ podia ser escrita em termos da taxa de variação do fluxo magnético através do circuito

$$\mathcal{E} = \oint \vec{F}_{\text{mag}} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Variações desse experimento foram também realizadas por Michael Faraday em 1831 em que o circuito era mantido em repouso, enquanto a região de campo $\vec{B}$ era movida e em que tanto o circuito quanto a região de campo eram mantidas em repouso, mas a intensidade do campo $\vec{B}$ era variada.



Em todos os casos, Faraday percebeu que a diferença de potencial entre os terminais do resistor era consistente com uma força eletromotriz dada por

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Os dois últimos casos, entretanto, não podem estar associados a forças de natureza magnética, já que as cargas estão paradas.

Faraday então postulou que tais forças deveriam ser de natureza elétrica e geradas por um campo magnético variável

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{com } \Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{a} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

lei de Faraday

Junto com a lei de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, o campo elétrico $\vec{E}$ está completamente definido de acordo com o Teorema de Helmholtz.

Em situações especiais, entretanto, em que o campo $\vec{E}$ é gerado apenas por um campo magnético variável, é possível estabelecer um paralelo entre os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Nesses casos, temos que $\rho = 0$ e, portanto, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Sendo assim, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Nessas situações especiais, podemos determinar o campo $\vec{E}$ de certos problemas com simetria de forma similar a que utilizamos para determinar o campo magnetostático, interpretando $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ como o correspondente termo de fonte do campo $\vec{E}$, assim como $\mu_0 \vec{J}$ era o termo de fonte do campo $\vec{B}$.

Seja, quando a simetria do problema permitir, podemos explorar a lei de Faraday na sua forma integral

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

lei de Faraday
integral para campo
 $\vec{E}$ puramente
solenóide ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$)

Aproximação quase-estática

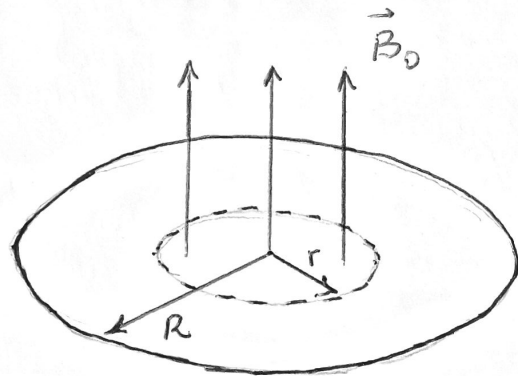
Casos em que a variação temporal do fluxo $\frac{d\Phi}{dt}$ surge diretamente de um campo magnético variável $\vec{B}(t)$ e não de um movimento relativo entre $\vec{B}$ e o circuito elétrico ou de uma variação no formato do circuito devem ser analisados com mais cuidado. A razão para tal cautela é que só sabemos calcular até agora campos magnetostáticos, ou seja, aqueles gerados por correntes estacionárias via Biot-Savart.

As situações nas quais determinaremos um campo elétrico solenóide via $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$, e nas quais o campo magnético é dependente do tempo, serão aquelas em que a chamada aproximação quase-estática se aplica.

Na aproximação quase-estática, a variação temporal do campo magnético $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ é lenta o suficiente para que a lei de Biot-Savart seja ainda uma boa aproximação para o cálculo do campo. Sendo assim, podemos calcular $\vec{B}$ como se a corrente fosse estacionária e obter $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ em seguida analisando a dependência temporal da corrente elétrica.

Na prática, só nos preocuparemos com a quebra da aproximação quase-estática quando estudarmos ondas eletromagnéticas. Mesmo em circuitos operando a altas frequências (como microondas), desde que tais circuitos sejam compactos (como em microeletrônica), a aproximação quase-estática é boa.

Exemplo: Um aro fino, que pode ser considerado unidimensional, possui raio R e está carregado com densidade linear de carga λ . Suas raízes são feitas de material isolante. O aro é suspenso pelo seu centro de massa de forma a se manter na horizontal numa região onde há um campo magnético $\vec{B}_0$ uniforme na vertical. Descreva o que acontece após o campo magnético ser desligado. O campo magnético só existe numa região de raio $r < R$ concêntrica ao aro.



Cio ser desligado o campo $\vec{B}_0$, a correspondente variação de fluxo magnético deve originar um campo elétrico na região em questão.

Perceba que, matematicamente, esse problema é similar àquele de determinar o campo magnetostático gerado por uma densidade volumétrica de corrente uniforme fluindo ao longo de um fio de seção transversal cilíndrica. Por simetria, $\vec{E}$ deve estar então na direção $\hat{\phi}$.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (2\pi s) E$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \begin{cases} \pi s^2 B_0, & s \leq r \\ \pi r^2 B_0, & s \geq r \end{cases}$$

Portanto, sobre o arco ($s = R$), temos que o torque aplicado pelo campo elétrico sobre um pequeno elemento de comprimento dl do arco é

$$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F} = (R\hat{s}) \times (\lambda dl \vec{E})$$

$$= (R\hat{s}) \times (\lambda dl E \hat{\phi})$$

$$= R \lambda E dl \hat{z}$$

O torque total é então

9

$$\vec{N} = \int d\vec{N} = R\lambda \hat{z} \int E dl = R\lambda \hat{z} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ou seja

$$\vec{N} = R\lambda \hat{z} \left(-\frac{d\Phi}{dt} \right) = -R\lambda \hat{z} \frac{d}{dt} (\pi r^2 B_0)$$

$$= -R\lambda \pi r^2 \frac{dB_0}{dt} \hat{z}$$

O momento angular $\vec{L}$ adquirido após o campo $\vec{B}_0$ ir a zero é então

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int \vec{N} dt = -R\lambda \pi r^2 \hat{z} \int \frac{dB_0}{dt} dt \\ &= -R\lambda \pi r^2 \hat{z} \int_{B_0}^0 dB_0 = \lambda \pi r^2 R B_0 \hat{z} \end{aligned}$$

A lei de conservação do momento angular indica então que uma certa quantidade de momento estava armazenada inicialmente no sistema, mais especificamente, no campo magnético!

Energia magnética

Analisando em mais detalhe o exemplo anterior, vemos que além de momento angular $I \vec{\omega}$, o arv adquire também energia cinética de rotação $\frac{1}{2} I \omega^2$ e, portanto, o campo magnético também deve conter, assim como o campo elétrico, uma certa densidade de energia.

Queremos calcular agora essa densidade de energia magnética.

Para isso, analisaremos primeiro as propriedades de circuitos unidimensionais e, em seguida, generalizaremos para campos magnéticos gerados por densidades volumétricas de corrente $\vec{J}$.

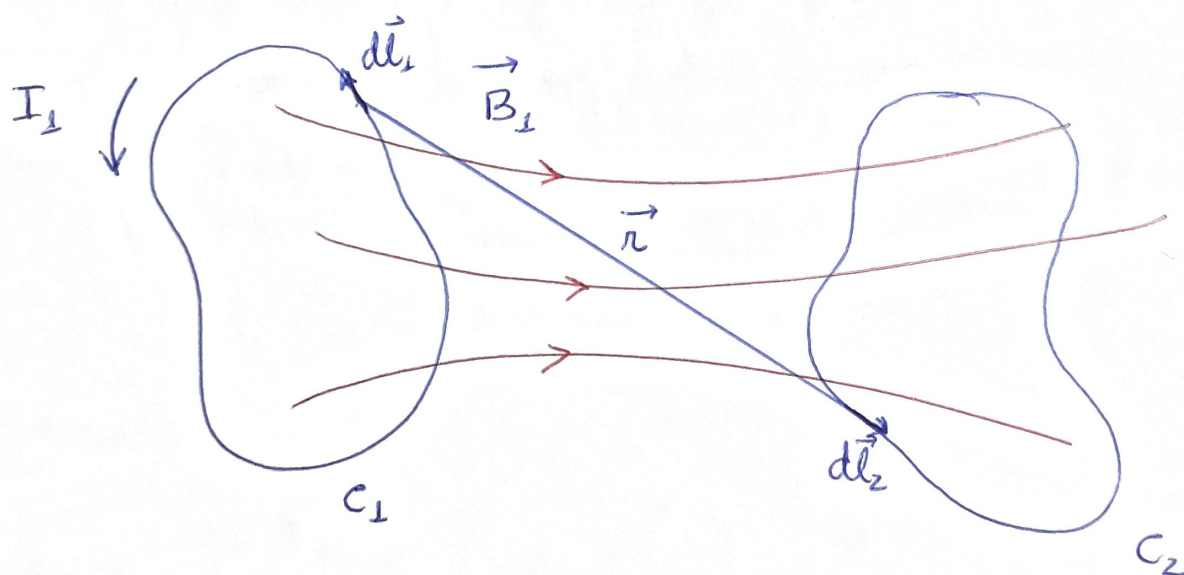
Assim como gasta-se energia para montar uma certa configuração de cargas elétricas estáticas e tal energia fica armazenada no campo elétrico $\vec{E}$ gerado pelas cargas, também gasta-se energia para que uma corrente elétrica flua por um circuito.

Isso se deve ao fato de que ao tentar passar uma corrente por um circuito, surge nele uma força eletromotriz que tende a se opor à corrente original.

Assim como a energia eletrostática, essa energia gasta para vencer a força eletromotriz de reação do circuito não se perde e fica armazenada no campo magnético.

Para entender melhor esse processo é preciso estudar o conceito de indutância.

Começamos com a interação entre 2 circuitos elétricos



O campo magnético gerado por C_1 na aproximação quase-estática é

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}}{r^2}$$

Já o fluxo gerado em C_2 por esse campo é

12

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = \left\{ \int \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}}{r^2} \right] \cdot d\vec{a} \right\} I_1 \\ &= M_{21} I_1\end{aligned}$$

onde M_{21} é chamada de indutância mútua dos circuitos C_1 e C_2 . Em termos do potencial vetor temos

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = \int (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{a}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

Mas o potencial vetor gerado pelo circuito C_1 é dado em termos de uma integral por

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1}{r}$$

Portanto

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \left(\oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1}{r} \right) \cdot d\vec{l}_2 = M_{21} I_1$$

$\Downarrow$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$$

←
puramente geométrico

→ simétrico na troca $1 \leftrightarrow 2$



$$M_{12} = M_{21} (!)$$

Ou seja

$$\Phi_2 = M_{21} I = M_{12} I = \Phi_1$$

independente dos
formatos dos
circuitos!

Agora, se ao invés de olharmos para o fluxo induzido através de C_2 devido ao campo $\vec{B}_1$, analisarmos o fluxo através do próprio circuito C_1 devido ao campo $\vec{B}_1$. Também teremos uma proporcionalidade entre fluxo magnético e corrente

$$\Phi = L I$$

A constante de proporcionalidade é chamada de auto-indutância do circuito.

14

De acordo com a lei de Faraday, ao tentar estabelecer uma corrente I , surge então uma força eletromotriz que se opõe ao estabelecimento dessa corrente, de forma que

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (LI) = - L \frac{dI}{dt}$$