# NÚCLEO E IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Sejam $(V_1, +_1, \cdot_1, 0_1)$ e $(V_2, +_2, \cdot_2, 0_2)$ espaços vetoriais e seja $T: V_1 \longrightarrow V_2$ uma transformação linear.

$\operatorname{Ker} T$ = Núcleo da transformação linear.

$$\operatorname{Ker} T = \{ v \in V_1 \mid T(v) = 0 \} \subset V_1$$

$\operatorname{Im} T$ = Imagem da transformação linear, é a imagem de $T$ como função

$$\operatorname{Im} T = \{ u \in V_2 \mid \exists\, v \in V \mid T(v) = u \}$$
$$= \{ T(v) \mid v \in V \}$$

PROPOSIÇÃO: (a) $\operatorname{Ker} T$ é um subespaço de $V_1$.

(b) $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de $V_2$.

Demonstração:

(a) – $0_1 \in \operatorname{Ker} T$, pois $T(0_1) = 0_2$.

– Se $u, v \in \operatorname{Ker} T$ então $u +_1 v \in \operatorname{Ker} T$.

De fato: $u, v \in \operatorname{Ker} T \iff T(u) = T(v) = 0_2$

Então $T(u +_1 v) \underset{T \text{ linear}}{=} T(u) +_2 T(v) = 0_2 +_2 0_2 = 0_2$

– Se $v \in \operatorname{Ker} T$, $a \in \mathbb{R}$, então $a \cdot_1 v \in \operatorname{Ker} T$.

$v \in \operatorname{Ker} T \iff T(v) = 0_2$

$T(a \cdot_2 v) \underset{T \text{ linear}}{=} a \cdot_2 T(v) = a \cdot_2 0_2 = 0_2$

(b) $\operatorname{Im} T$ é subespaço de $V_2$

– $0_2 \in \operatorname{Im} T$, pois $T(0_1) = 0_2$.

– Se $u_1, u_2 \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \in V_1$ tais que $T(v_1) = u_1$ e $T(v_2) = u_2$.

Então $u_1 +_2 u_2 = T(v_1) +_2 T(v_2) = T(v_1 +_1 v_2)$

Logo $u_1 +_2 u_2 \in \operatorname{Im} T$

– Se $u \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \exists\, v \in V$ tq $u = T(v)$.

Se $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot_2 u = a \cdot_2 T(v) = T(a \cdot_1 v)$. Logo $a \cdot_2 u \in \operatorname{Im} T$.

**OBSERVAÇÃO:**

Se $B=\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $V_1$ então

$$\operatorname{Im} T = [T(v_1), \ldots, T(v_n)].$$

De fato: Seja $u \in \operatorname{Im} T$. $\exists\, v \in V_1$ tal que $T(v) = u_1$.

Agora, $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Logo

$$u = T(v) = a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n).$$

**Exemplo**

Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y+z,\ 2x+y-z,\ x-2z)$.

Determinar $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

$$\operatorname{Ker} T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

Então, $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\,T \iff$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3 \leftrightarrow L3-L1]{L2 \leftrightarrow L2-2L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3 \leftrightarrow L3-L2]{L2 \leftrightarrow (-1)L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema equivalente é

$y=-3z$

$x=-y-z = 3z-z=2z$

Assim, fazendo $z=t$, temos $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\,T \iff$

$$(x,y,z) = (2t,-3t,t) = t\,(2,-3,1),\ t \in \mathbb{R}.$$

Assim $\mathrm{Ker}\,T = [(2,-3,1)]$. (é uma reta)

Pela observação 5, $\mathrm{Im}\,T = [T(e_1), T(e_2), T(e_3)]$

$= [(1,2,1),(1,1,0),(1,-1,-2)]$

Note que esses vetores são as colunas da matriz acima.

Pelo escalonamento já vemos que

$\mathrm{Im}\,T = [(1,2,1),(1,1,0)]$ e uma base da $\mathrm{Im}\,T$ é

$\{(1,2,1),(1,1,0)\}$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$T_A : \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T_A(x, y, z, t) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

$\text{Im}T = [(1, 2, -1), (0, 1, 2), (1, 3, 2)]$

Base de $\text{Im}T$

$\{(1, 2, -1), (0, 1, 2), (1, 3, 2)\}$

$\text{Ker}\, T_A = \{$ solução do sistema $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$

A matriz desse sistema é $A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema equivalente:

$t = 0$

$y + z + t = 0 \Rightarrow y = -z$

$x + 3z + t = 0 \quad x = -3z$

$(-3z, -z, z, 0)$

$\text{Ker}\, T = [(-3, -1, 1, 0)]$

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função.

$f$ é INJETORA se $f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$.

$f$ é SOBREJETORA se $\mathrm{Im} f = B$.

PROPOSIÇÃO: Seja $T : V_1 \longrightarrow V_2$ um transformaçd linear. $T$ é injetora se, e somente se, $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Suponha que $T$ é injetora e que $v \in \mathrm{Ker}\, T$.

Então $T(v) = T(0) \underset{T \text{ injetora}}{\Longrightarrow} v = 0$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ e que $u, v \in V$ são tais que $T(u) = T(v)$.

Então: $T(u) = T(v) \Longrightarrow T(u) - T(v) = 0 \Longrightarrow T(u - v) = 0$

$\Longrightarrow u - v \in \mathrm{Ker}\, T = \{0\} \Longrightarrow u - v = 0 \Longrightarrow u = v$.

# TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM

Seja $T: V_1 \longrightarrow V_2$ uma transformação linear.

Então $\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$.

Demonstração:

Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ uma base de $\operatorname{Ker} T \subset V_1$.

Estenda essa base a uma base de $V_1$. (Teo do Completamento)

$B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ base de $V_1$

Temos que $\operatorname{Im} T = [T(v_1), \dots, T(v_k), T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$.

Mas $T(v_1) = \dots = T(v_k) = 0$. Logo $\operatorname{Im} T = [T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)]$

Vamos mostrar então que $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ é LI.

Suponha que $a_{k+1} T(v_{k+1}) + \dots + a_n T(v_n) = 0$

$$\Rightarrow T(a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n) = 0$$

$$\Rightarrow a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n \in \operatorname{Ker} T.$$

Logo $a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n$ é CL da base de Ker T.

Portanto $a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$

$$\Rightarrow -a_1 v_1 - \cdots - a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n = 0$$

$$\underset{\mathcal{B} \text{ é LI}}{\Longrightarrow} a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 .$$

Em particular $a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$. //

## CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA do Ker T e da Im T.

Seja $T : V_1 \longrightarrow V_2$ transformação linear.

(1) Se $\dim V_1 < \dim V_2$, T NÃO é sobrejetora.

(2) Se $\dim V_1 > \dim V_2$, T NÃO é injetora.

(3) Se $\dim V_1 = \dim V_2$, vale que T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

PROP: Seja $T: V_1 \longrightarrow V_2$ transformação linear.

(1) $T$ é injetora $\Longleftrightarrow$ $T$ leva conjtos LI de $V_1$ em conjuntos LI de $V_2$.

(2) $T$ é sobrejetora $\Longleftrightarrow$ $T$ leva conjuntos geradores de $V_1$ em conjuntos geradores de $V_2$.

(3) $T$ é bijetora $\Longleftrightarrow$ $T$ leva base em base.

Demonstração

(1) ($\Longrightarrow$) Suponha que $T$ é injetora e que $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ é LI.

Mostrar que $\{T(v_1), \dots, T(v_k)\}$ é LI

Suponha que $a_1 T(v_1) + \dots + a_k T(v_k) = 0 \Longleftrightarrow$

$T(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) = 0 \Longleftrightarrow a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \in \operatorname{Ker} T = \{0\}$

$\Longrightarrow a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0 \underset{\{v_1, \dots, v_k\} \text{ LI}}{\Longrightarrow} a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$

($\Longleftarrow$) Quero provar que $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Suponha que $v \in V$ é ~~tq~~ $T(v) = 0$.

Se $v \neq 0$, $\{v\}$ é LI $\underset{\text{hipótese}}{\Longrightarrow}$ $\{T(v)\}$ LI. Logo $T(v) \neq 0$.

contradição

($\Rightarrow$) $T$ é sobrejetora $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = V_2$.

Suponha que $\{v_1, ---, v_k\}$ gera $V_1$ $\Rightarrow$ $\{T(v_1), ---, T(v_k)\}$ gera $V_2$

Mas $[T(v_1), ---, T(v_k)] = \operatorname{Im} T$, já que $\{v_1, ---, v_k\}$ gera $V_1$

($\Leftarrow$) Suponha agora que $T$ é sobrejetora.

Suponha que $\{v_1, ---, v_k\}$ gera $V_1$.

Seja $u \in V_2$ $\underset{T \text{ sobrej.}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, v \in V_1$ tq $T(v) = u$.

Mas $v = a_1 v_1 + --- + a_k v_k$ $\Rightarrow$ $u = T(v) =$

$a_1 T(v_1) + --- + a_k T(v_k)$. Logo $u \in [T(v_1), ---, T(v_k)]$

$\Rightarrow \{T(v_1), ---, T(v_k)\}$ gera $V_2$.

(3) Sai de (1) e (2).