

AULA 25

MECÂNICA QUÂNTICA II

Estados Especiais do Campo Eletromagnético

1. Como vimos cada modo do campo eletromagnético pode ser caracterizado por um número de ocupação

$$H = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k}\lambda} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}\lambda}$$

onde para especificar o campo total na cavidade é necessário indicar o número de fótons em cada modo; assim um estado genérico do campo pode ser escrito como

$$|n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2} \dots \rangle = |n_{\vec{k}_1}\rangle \otimes |n_{\vec{k}_2}\rangle \otimes \dots \equiv |\{n_{\vec{k}}\}\rangle$$

onde omitimos a dependência em λ , por simplicidade de notação.

Esses estados, estados do espaço de Fock, são auto estados de H e do operador de número $N_{\vec{k}\lambda}$

$$\vec{E}(x) = i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar c k}{2V}} [e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_{\vec{k}\lambda} \vec{E}_{\vec{k}\lambda} - h.c.]$$

$$\vec{B}(x) = i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2V k}} [e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_{\vec{k}\lambda} \vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}\lambda} - h.c.]$$

~~Para~~ Para um estado com n fótons em um dado modo

$$\langle n | \vec{E}^2(t) | n \rangle = \frac{\hbar \omega}{V} (2n+1) \quad \langle n | \vec{E}(t) | n \rangle = 0$$

$$\Delta E = [\langle n | \vec{E}^2 | n \rangle - \langle n | \vec{E} | n \rangle^2]^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{V} (2n+1)} \quad (1)$$

o que cresce com a raiz do número de fótons se $n \gg 1$.

2. Estados coerentes (Recep. MQI)

Como já vimos, antes há várias formas de definir estados coerentes.

a) autovetores do operador a

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad z = |z| e^{i\theta}$$

que em termos da base do espaço de Fock é dado por

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$= e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n (a_{\text{in}}^+)^n}{n!} |0\rangle$$

b) podem ser construídos usando o operador de deslocamento $D(z)$ operando sobre $|0\rangle$

$$D(z) = e^{-z^*a + za^+} = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{za^+} e^{-z^*a}$$

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle$$

$$\text{com } D^+(z) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{-z^*a^+} e^{z^*a} = D(-z)$$

$$D^+(z) D(z) = \mathbb{I} \quad (\text{unitário})$$

$|z\rangle$ são estados de mínimo do princípio de incerteza, continuam no ~~espaço~~ espaço qualquer que seja o instante de tempo

Propriedades:

a) $\langle z | a^\dagger a | z \rangle = |z|^2 = \langle n \rangle = \bar{n}$ $\Delta n = |z|$

número médio de γ s no estado coerente

o número de fótons obedece uma distribuição de Poisson

$$p(n) = \langle n | z \rangle \langle z | n \rangle = \frac{|z|^{2n} e^{-\bar{n}}}{n!} = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}$$

b) o conjunto de estados coerentes é super completo

$$\frac{1}{\pi} \int |z\rangle \langle z| d^2z = 1$$

$$|\langle z | z' \rangle|^2 = e^{-|z-z'|^2} \quad (\text{não são ortogonais!})$$

$$\langle z | E(t) | z \rangle = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{V}} (z e^{-i\omega t} + z^* e^{i\omega t}) = 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{V}} |z| \cos(\omega t - \theta)$$

$$\langle z | E^2(t) | z \rangle = \frac{\hbar\omega}{V} [(z e^{-i\omega t} + z^* e^{i\omega t})^2 + 1]$$

$$\Delta E_z = \left[\langle z | E^2 | z \rangle - \langle z | E | z \rangle^2 \right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{V}} \Delta_0 E$$

a dispersão de um estado coerente é a mesma do vácuo. Note que o valor médio de \vec{E} cresce com $|z| = \sqrt{\bar{n}}$ mas a dispersão continua constante!

Podemos definir os operadores de quadratura:

$$X_1 = \frac{1}{2} (a + a^\dagger) \quad X_2 = \frac{1}{2i} (a - a^\dagger)$$

$$[X_1, X_2] = i/2 \quad \Rightarrow \quad \Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{4} \quad (\text{relação de incerteza})$$

$$E(t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2V}} [e^{-i\omega t} a - e^{i\omega t} a^\dagger]$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2V}} [(i \cos \omega t + \sin \omega t) a - (i \cos \omega t - \sin \omega t) a^\dagger]$$

$$X_1 + i X_2 = \frac{1}{2} (a + a^\dagger) + \frac{1}{2} (a - a^\dagger) = a$$

$$X_1 - i X_2 = \frac{1}{2} (a + a^\dagger) - \frac{1}{2} (a - a^\dagger) = a^\dagger$$

$$E(t) = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2V}} [(i \cos \omega t + \sin \omega t) (X_1 + i X_2) - (i \cos \omega t - \sin \omega t) (X_1 - i X_2)]$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2V}} [i \cos \omega t X_1 - \cos \omega t X_2 + \sin \omega t X_1 + i \sin \omega t X_2 - i \cos \omega t X_1 - X_2 \cos \omega t + X_1 \sin \omega t + i X_2 \sin \omega t]$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2V}} 2 [\sin \omega t X_1 - \cos \omega t X_2]$$

$$\langle z | X_1 | z \rangle = \frac{1}{2} [\langle z | a | z \rangle + \langle z | a^\dagger | z \rangle] = \frac{1}{2} (z + z^*) = \text{Re}(z)$$

$$\langle z | X_2 | z \rangle = \frac{1}{2i} [\langle z | a | z \rangle - \langle z | a^\dagger | z \rangle] = \frac{1}{2i} (z - z^*) = \text{Im}(z)$$

$$\langle z | X_1^2 | z \rangle = \frac{1}{4} \langle z | a^2 + a^{\dagger 2} + a a^\dagger + a^\dagger a | z \rangle = \frac{1}{4} (z^2 + z^{\dagger 2} + 1 + 2|z|^2)$$

$$= (|z|^2 e^{i2\theta} + |z|^2 e^{-i2\theta} + 1 + 2|z|^2) / 4 \quad (4)$$

$$= (|z|^2 2 \cos 2\theta + 1 + 2|z|^2) / 4 = \frac{2|z|^2}{4} (1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \frac{1}{4}$$

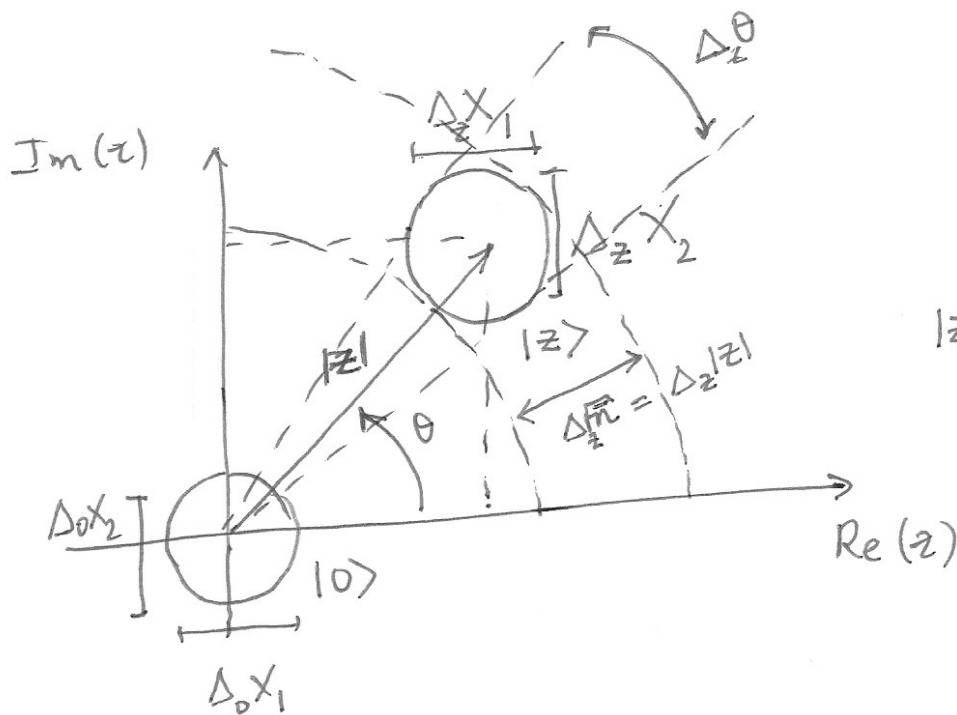
$$= |z|^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{4} = \text{Re}^2(z) + \frac{1}{4}$$

$$\Delta_z X_1 = [\langle z | X_1^2 | z \rangle - \langle z | X_1 | z \rangle^2]^{1/2} = [\text{Re}^2(z) + \frac{1}{4} - \text{Re}^2(z)]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

de forma análoga $\Delta_z X_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta_z X_1 \Delta_z X_2 = \frac{1}{4}}$ desigualdade de Heisenberg
 natureza dos estados coerentes



$$|z\rangle = D(z) |0\rangle$$

O campo \vec{E} flutua em amplitude e em fase em torno do valor médio

$$\langle z | \vec{E}(t) | z \rangle = 2 \sqrt{\frac{\hbar \omega}{V}} |z| \cos(\omega t - \theta) = \langle E \rangle$$

a flutuação em amplitude é $\Delta_z E / \langle E \rangle \approx \frac{1}{2} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(5)

onde $|z| = \sqrt{\bar{n}}$, \bar{n} é o número médio de fótons

e $\Delta_z n = \sqrt{\bar{n}}$, com a flutuação de fase

$$\Delta_z \theta \Delta_z N \simeq \frac{1}{2}$$

3. Estados Comprimidos (squeezed states)

Similarmente aos estados coerentes, estados comprimidos também são estados de mínimo de ruído de incerteza para as quadraturas X_1 e X_2 .

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = 1/4$$

não requer que $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1/2$

As flutuações quânticas limitam a precisão de medidas óticas: mesmo que você consiga remover todos os fontes de erros sistemáticos nas medidas óticas, o ruído quântico estará sempre presente!

Estados comprimidos $|z, \xi\rangle$ podem ser gerados do vácuo $|0\rangle$ por:

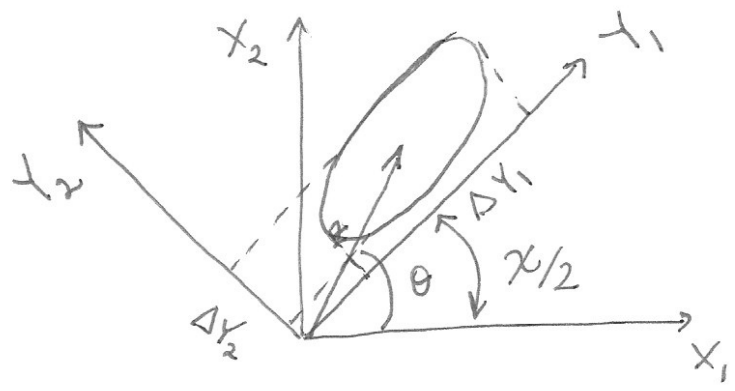
$$|z, \xi\rangle = D(z) S(\xi) |0\rangle$$

onde $S(\xi)$ é o operador de compressão definido como

$$S(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{+2})} \quad \xi = r e^{i\phi}$$

um estado comprimido pode ser gerado primeiro comprimindo o vácuo ao longo de direção com ângulo $\chi/2$ (6)

e depois deslocando o vácuo comprimido por z ao longo da direção a um ângulo θ .



$$S(-\xi) = S^\dagger(\xi) = S^{-1}(\xi)$$

os valores esperados dos operadores de criação e aniquilação são

$$\langle z, \xi | a^\dagger | z, \xi \rangle = z^* \quad \langle z, \xi | a | z, \xi \rangle = z$$

\neq estados comprimidos assim como par estados coerentes.

Usando

$$S^\dagger(\xi) a S(\xi) = a - [X, a] + \frac{1}{2!} [X[X, a]] + \dots$$

onde $X \equiv \frac{1}{2} (\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2})$

podemos mostrar que

$$S^\dagger(\xi) a S(\xi) = a \cosh r - a^\dagger e^{ix} \sinh r$$

$$S^\dagger(\xi) a^\dagger S(\xi) = a^\dagger \cosh r - a e^{-ix} \sinh r$$

$|\xi\rangle = S(\xi)|0\rangle$ estado comprimido

$$\langle \xi | a | \xi \rangle = \langle \xi | a^\dagger | \xi \rangle = 0$$

mas

$$\langle \xi | a^2 | \xi \rangle = \langle \xi | a^{+2} | \xi \rangle^* = -e^{ix} \sinh r \cosh r$$

$$\langle \xi | a^+ a | \xi \rangle = \sinh^2 r$$

com isso é possível calcular

$$\Delta_{\xi} X_1 = \frac{1}{2} (\cosh 2r - \cos x \sinh 2r)^{1/2}$$

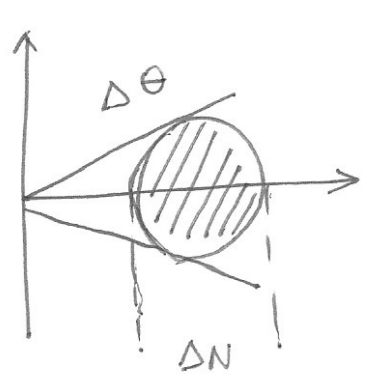
$$\Delta_{\xi} X_2 = \frac{1}{2} (\cosh 2r + \cos x \sinh 2r)^{1/2}$$

$$x=0 \quad \Delta_{\xi} X_1 = \frac{1}{2} e^{-r} \Rightarrow \text{reduzido de um fator } e^{-r}$$

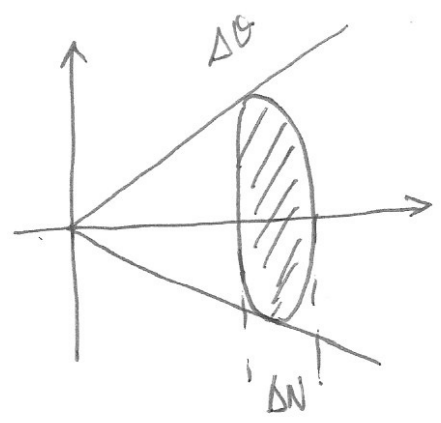
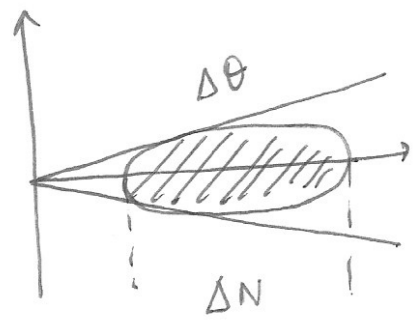
$$\Delta_{\xi} X_2 = \frac{1}{2} e^r \Rightarrow \text{aumentado de um fator } e^r$$

$$\text{mas } \Delta_{\xi} X_1 \Delta_{\xi} X_2 = \frac{1}{4}$$

os estados comprimidos também saturam a desigualdade de Heisenberg.



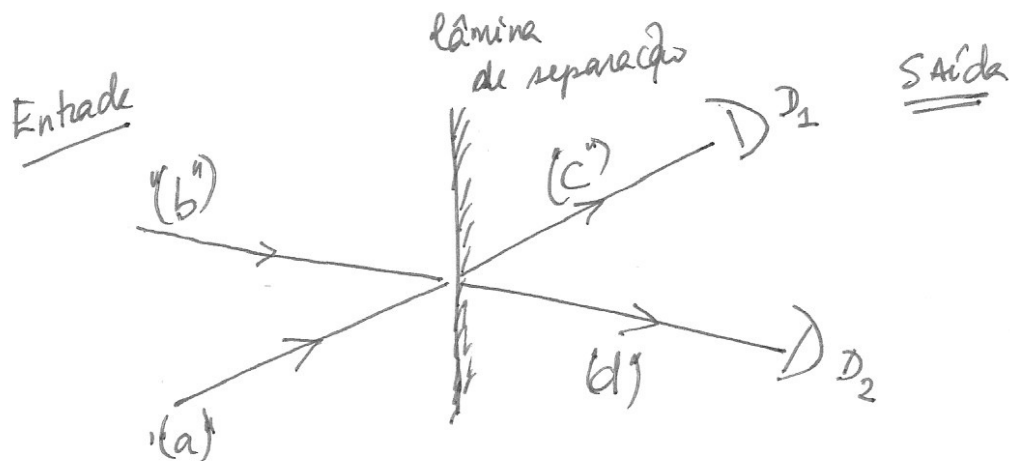
estado coerente



Vemos que é possível diminuir a dispersão sobre a fase $\Delta\theta$ e aumentar a dispersão sobre N ou diminuir a dispersão sobre o número de fótons e aumentar sobre θ .

Detecção Homodina

Considere a mistura do campo elétrico que se quer medir com um sinal de referência de mesma frequência



a lâmina separadora será desequilibrada: os coeficientes de transmissão t e reflexão r serão escolhidos como

$$t = \cos \lambda \quad r = i \sin \lambda$$

Se a e b são os operadores de destruição dos modos "(a)" e "(b)"
Definimos o operador

$$U(\lambda) = e^{i\lambda G}$$

$$G = a b^\dagger + a^\dagger b$$

$$U^\dagger(\lambda) = U(-\lambda)$$

de forma que

$$c = U^\dagger(\lambda) a U(\lambda) = a \cos \lambda + i b \sin \lambda$$

$$d = U^\dagger(\lambda) b U(\lambda) = i a \sin \lambda + b \cos \lambda$$

Note que o vácuo dos 2 modos é $|0_a 0_b\rangle$ e $G|0_a 0_b\rangle = 0$

$$\Rightarrow U(\lambda) |0_a 0_b\rangle = |0_a 0_b\rangle$$

Na descrição de Schrodinger onde o estado final $|\psi'\rangle$ é dado pela evolução do estado inicial $|\psi\rangle$, isto é,

$$|\psi'\rangle = U(\lambda) |\psi\rangle$$

examinemos o caso de um fóton incidente no modo (a)

$$|\psi\rangle = |1_a 0_b\rangle = a^\dagger |0_a 0_b\rangle$$

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= U(\lambda) a^\dagger |0_a 0_b\rangle = U(\lambda) a^\dagger U^\dagger(\lambda) U(\lambda) |0_a 0_b\rangle \\ &= (a^\dagger \cos \lambda + i b^\dagger \sin \lambda) |0_a 0_b\rangle \\ &= \cos \lambda |1_a 0_b\rangle + i \sin \lambda |0_a 1_b\rangle \end{aligned}$$

a amplitude de probabilidade para que um fóton saia no modo (a) é $\cos \lambda$ e a amplitude de probabilidade para que o fóton saia no modo (b) é $i \sin \lambda$.

Para reencontrar o caso clássico examinemos a ação de lâmina sobre um estado coerente $|z\rangle$ do modo (a), com o modo (b) vácuo.

$$|\psi\rangle = D_a(z) |0_a 0_b\rangle = |z\rangle_a \otimes |0\rangle_b$$

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= U(\lambda) D_a(z) |0_a 0_b\rangle = U(\lambda) D_a(z) U^\dagger(\lambda) U(\lambda) |0_a 0_b\rangle \\ &= e^{a^\dagger z \cos \lambda - a z^* \cos \lambda} e^{i b^\dagger z \sin \lambda + i b z^* \sin \lambda} |0_a 0_b\rangle \\ &= D_a(z \cos \lambda) D_b(i z \sin \lambda) = |z \cos \lambda \otimes i z \sin \lambda\rangle \end{aligned}$$

O resultado é o produto tensorial de 2 estados coerentes.

Encontramos a ação de uma lâmina separadora sobre uma onda clássica com a repartição de intensidade

$|t|^2 = \cos^2 \lambda$, $|r|^2 = \sin^2 \lambda$ nos 2 canais de saída.

Suponha agora que partamos de um estado $|1_a 1_b\rangle$ 1 fóton no modo a e outro no modo b.

$$|1_a 1_b\rangle = a^\dagger b^\dagger |0_a 0_b\rangle$$

a lâmina separadora transforme esse estado em

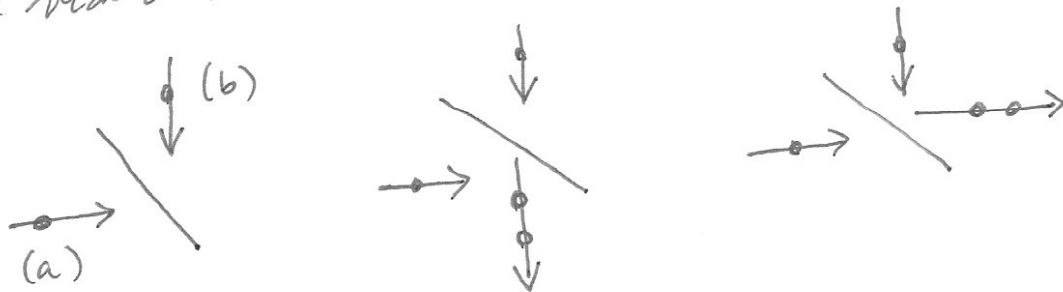
$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= U(\lambda) a^\dagger b^\dagger |0_a 0_b\rangle = U(\lambda) a^\dagger b^\dagger U^\dagger(\lambda) |0_a 0_b\rangle \\ &= (a^\dagger \cos \lambda + i b^\dagger \sin \lambda) (i a^\dagger \sin \lambda + b^\dagger \cos \lambda) |0_a 0_b\rangle \\ &= i \frac{\sin 2\lambda}{\sqrt{2}} (|2_a 0_b\rangle + |0_a 2_b\rangle) + \cos 2\lambda |1_a 1_b\rangle \end{aligned}$$

onde usamos $(a^\dagger)^2 |0\rangle = \sqrt{2} |2\rangle$.

Se a lâmina separadora for equilibrada com $\lambda = \pi/4$

$$|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|2_a 0_b\rangle + |0_a 2_b\rangle)$$

os 2 fótons saem simultaneamente de lâmina por uma das 2 vias de saída:



a probabilidade conjunta de detectar um fóton em cada via é nula.

Vamos agora definir os operadores de quadratura gerais

$$X_\theta = \frac{1}{2} (a e^{-i\theta} + a^\dagger e^{i\theta})$$

$$X_1 = X_{\theta=0}$$

$$X_{\theta+\pi/2} = \frac{1}{2i} (a e^{-i\theta} - a^\dagger e^{i\theta})$$

$$X_2 = X_{\theta=\pi/2}$$

O campo elétrico em $t=0$ é proporcional a X_1 , X_θ representa o campo rodado de um ângulo θ . O ponto importante é que podemos medir sua amplitude por detecção homodina

O sinal (a) é misturado com o oscilador (b) com o auxílio de uma lâmina separadora equilibrada ($|r|=|t|=1/\sqrt{2}$)

Nestas condições

$$c^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger + i b^\dagger)$$

$$d^\dagger = \frac{(i a^\dagger + b^\dagger)}{\sqrt{2}}$$

O número de fótons nos modos c e d são respectivamente

$$N_c = c^\dagger c = \frac{1}{2} [a^\dagger a + b^\dagger b + i (b^\dagger a - a^\dagger b)]$$

$$N_d = d^\dagger d = \frac{1}{2} [a^\dagger a + b^\dagger b - i (b^\dagger a - a^\dagger b)]$$

$a^\dagger a$ = # fótons do sinal

$b^\dagger b$ = # fótons do oscilador local

$N_c - N_d$ = diferença entre o # de fótons recebidos em cada detector.

$$= i (b^\dagger a - a^\dagger b) = -i (a^\dagger b - b a^\dagger)$$

Como o sinal e o oscilador local não estão correlacionados
 $\langle a^\dagger b \rangle = \langle a^\dagger \rangle \langle b \rangle$. Se o oscilador local é um estado
 coerente $|z\rangle$ então

$$\langle b \rangle = |z| e^{i\theta}$$

$$\langle b^\dagger \rangle = |z| e^{-i\theta}$$

↙ fase do oscilador local

Suponha que o oscilador local é o campo de um laser
 com $|z| \gg 1$; as flutuações do oscilador local são então
 desprezíveis, pois ele se comporta aproximadamente como
 um campo clássico. Nessas condições

$$N_c - N_d \simeq -i |z| (a^\dagger e^{i\theta} - a e^{-i\theta}) = 2|z| X_{\theta+\pi/2}$$

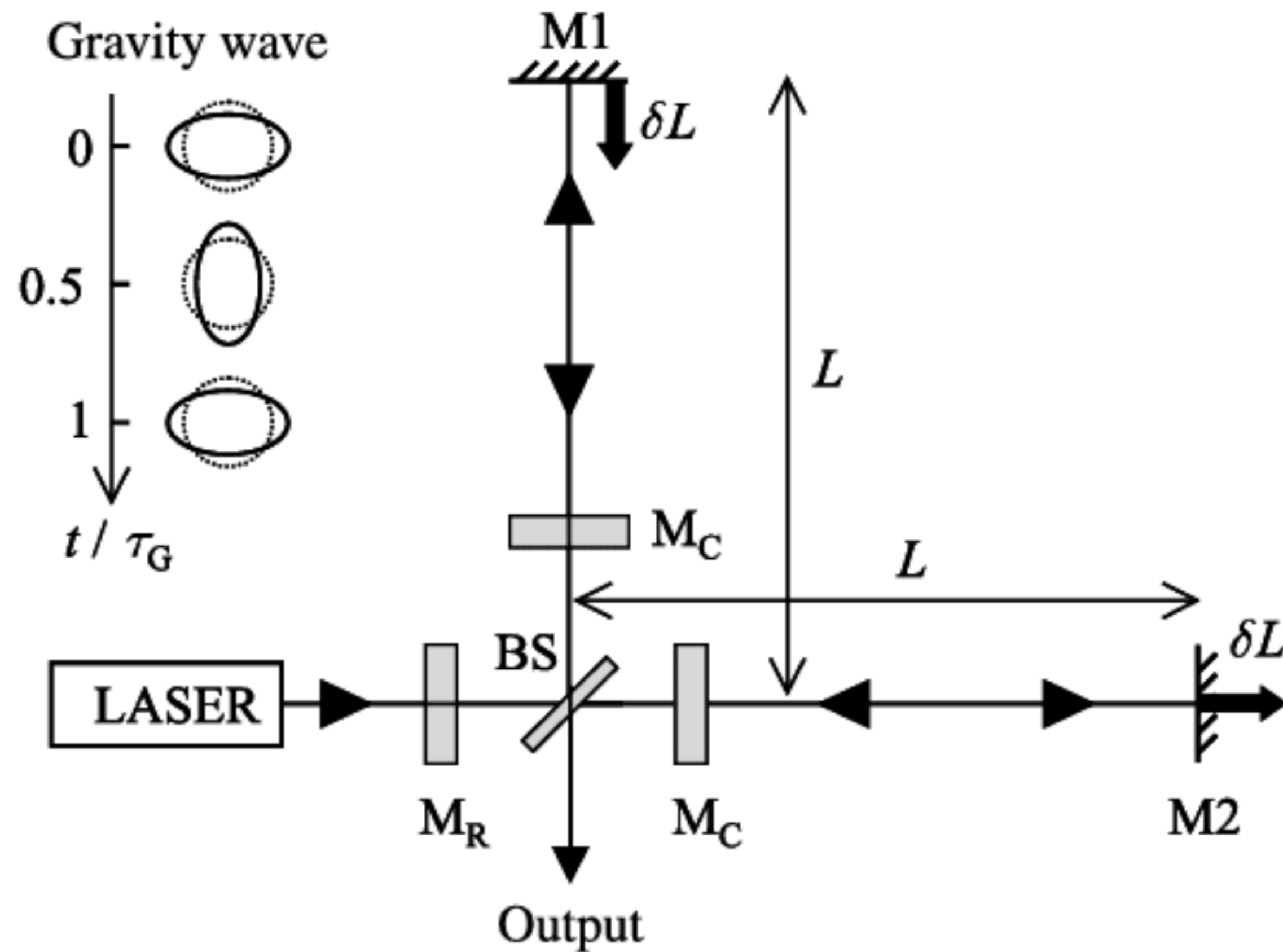
o detector homodino mede a quadratura $X_{\theta+\pi/2}$

Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{iA} B e^{-iA} = B + [iA, B] + \frac{[iA, [iA, B]]}{2!} + \dots$$

LIGO : Ruído quântico (Shot Noise) & Incerteza de Fase

(Light interferometer gravitational wave observatory) **laser de 1064 nm => 1.17 eV fótons**



$$\bar{n} = \frac{300 \text{ W}}{1.17 \text{ eV}} = 1.6 \times 10^{21} \text{ fótons/ segundo}$$

$$\Delta n = \sqrt{1.6 \times 10^{21}} = 4 \times 10^{20}$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2\Delta n} = 1.3 \times 10^{-12} \text{ rad}$$

$$\frac{\delta L}{\lambda} > \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

$$\delta L = 2.2 \times 10^{-18} \text{ m} \quad \text{em 1 segundo}$$