Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 12 - Semana 9/11 – 13/11

Exercício 1. *Para cada função abaixo considere que seu domínio seja algum intervalo simétrico pela origem I. Mostre que:*

i) as funções $g_0(x) = c$ (c constante), $g_1(x) = |x|$, $g_2 = x^2$ e $g(x) = cos(x)$ são funções pares.

ii) as funções $h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^3$, $h_3(x) = sin(x)$ são funções ímpares.

iii) se f e g forem funções pares, então $f.g$ e $f + g$ são também funções pares.

iv) se f e g forem funções ímpares, então $f.g$ é uma função par e $f + g$ é uma função ímpar.

v) se f for par e g for ímpar, então $f.g$ é função ímpar.

Solução. i) Como $g_0(-x) = c = g_0(x)$ para todo $x \in I$, então g_0 é uma função par.
Como $g_1(-x) = |-x| = |x| = g_1(x)$ para todo $x \in I$, então g_1 é uma função par.
Como $g_2(-x) = (-x)^2 = x^2 = g_2(x)$ para todo $x \in I$, então g_2 é uma função par.
Considere a serie de Maclauren da função coseno:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Lembre que o intervalo de convergência é $\mathbb{R}$. Em particular a serie converge no intervalo simétrico I. Logo obtemos que

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \cos(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in I$. Então $g(x)$ é uma função par.

ii) Como $h_1(-x) = -x = -h_1(x)$, então $h_1(x)$ é uma função ímpar
Como $h_2(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h_2(x)$, então h_2 é uma função ímpar.

Considere a serie de Maclauren da função seno:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Seu intervalo de convergência também é $\mathbb{R}$ e, em particular a série converge no intervalo simétrico I. Logo obtemos que

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= -\sin(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in I$. Então $h_3(x)$ é uma função impar.

iii) Se f e g são funções pares, então $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x)$. Daí:

$$(f.g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (f.g)(x)$$

Além disso,

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

Logo $f.g$ e $f+g$ são funções pares.

iv) Se f e g são funções ímpares, então $f(-x) = -f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$. Daí,

$$(f.g)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (f.g)(x)$$

Além disso,

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f(x) + g(x)] = -(f+g)(x)$$

Logo $f.g$ e $f+g$ são funções ímpares.

v) Sejam f par e g ímpar, ou seja, $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$. Daí:

$$(f.g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x) = -(f.g)(x)$$

Portanto, $f.g$ é uma função ímpar.

□

Exercício 2. *Dada $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*

a) Se f for par, então $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$.

b) Se f for ímpar, então $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$.

Solução. Primeiro, observe que pela propriedade de substituição para integrais definidas obtemos a igualdade:

$$\int_{0}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(-x)dx \tag{1}$$

a) Se f é par então temos que $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$. Assim temos que

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)dx &= \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \\ &=^{(1)} \int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \\ &= 2\int_{0}^{L} f(x)dx.\end{aligned}$$

b) Se f é ímpar então $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$. Assim temos que

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)dx &= \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \\ &=^{(1)} \int_{0}^{L} f(-x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \\ &= -\int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Exercício 3. *Mostre que:*

c) $2\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

d) $2\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

Solução. Das expressões de soma de arcos temos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

c) Adicionando ambas as expressões chegamos a

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$$

Com $\beta=\alpha$,

$$\cos(2\alpha)+\cos(0) = 2\cos(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$2\cos(\alpha)^2 = 1+\cos(2\alpha)$$

d) Subtraindo a primeira expressão da primeira temos

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Com $\beta=\alpha$,

$$\cos(0)-\cos(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\sin(\alpha)$$
$$2\sin(\alpha)^2 = 1-\cos(2\alpha)$$

□

Exercício 4. *Nos problemas abaixo considere que p e q são inteiros positivos:*

a)
$$\int_0^{2\pi}\cos(px)dx = 0$$

b)
$$\int_0^{2\pi}\sin(px)dx = 0$$

c)
$$\int_0^{2\pi}\cos(px)\cos(qx)dx = \begin{cases} 0 & p\neq q \\ \pi & p=q \end{cases}$$

d)
$$\int_0^{2\pi}\sin(px)\sin(qx)dx = \begin{cases} 0 & p\neq q \\ \pi & p=q \end{cases}$$

Solução. a)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos(px)dx &= \left(\frac{\sin(px)}{p}\right)\Big|_0^{2\pi} && (2)\\ &= \frac{\sin(2p\pi)-\sin(0)}{p} && (3)\\ &= 0 && (4)\\ & && (5)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin(px)dx &= \left(\frac{-\cos(px)}{p}\right)\Big|_0^{2\pi}\\ &= \frac{\cos(0)-\cos(2p\pi)}{p}\\ &= 0\end{aligned}$$

c) Consideremos primeiro que $p = q$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(px)dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \cos(2px)dx \tag{6}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{\sin(2px)}{2p}\right)\Big|_0^{2\pi} \tag{7}$$
$$= \pi \tag{8}$$

Agora suponha $p \neq q$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p+q)x) - \cos((p-q)x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q}\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

d) Consideremos primeiro que $p = q$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2(px)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - \cos(2px)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2px)}{2p}\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi\end{aligned}$$

Agora suponha $p \neq q$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p-q)x) - \cos((p+q)x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((p-q)x)}{p-q} - \frac{\sin((p+q)x)}{p+q}\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Exercício 5. *Considere que a série de Fourier de $f(x)$ dada pela serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

possa ser integrada termo a termo. Mostre que $a_n = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$ para todo $n \geq 0$, e $b_n = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$ para todo $n \geq 1$.

Solução. Sabemos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

Considere $n \geq 0$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos(nx)dx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)dx).$$

Como o professor Possani observou na Aula 12 temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \pi & k = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(px)\sin(qx)dx = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \pi & k = n \end{cases}$$

então obtemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = a_n\pi$$

logo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

Similarmente considere a integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin(nx)dx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\sin(nx)dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)dx).$$

obtemos assim que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = b_n\pi$$

logo

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

□

Exercício 6. *Encontre a série de Fourier das funções abaixo no intervalo* $[-\pi, \pi]$.

i) $g(x) = x^2$

ii) $h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

Solução. i) Como os coeficientes de Fourier são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

Sendo assim, temos que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}.\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}$$

Para calcularmos o termo a_n, temos:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

Integrando por partes com $u = x^2$ e $dv = \cos nx dx$, temos $du = 2xdx$ e $v = \frac{\sin nx}{n}$. Então:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\left(x^2 \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} 2xdx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left(\pi^2 \frac{\sin n\pi}{n} - \pi^2 \frac{\sin(-n\pi)}{n}\right) - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx
\end{aligned}
$$

Usando novamente integração por partes com $u = x$ e $dv = \sin nx dx$, obtemos $du = dx$ e $v = \frac{-\cos nx}{n}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
a_n &= -\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n} - \frac{\pi\cos(-n\pi)}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{n} - \frac{\pi\cos(-n\pi)}{n}\right) \\
&= \frac{-2}{n}.\frac{-2\cos n\pi}{n} \\
&= \frac{4\cos n\pi}{n^2}
\end{aligned}
$$

pois $\sin n\pi = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, $\cos n\pi = (-1)^n$ segue que

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Agora, para b_n temos:

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0$$

pois $f(x) = x^2$ é uma função par e $\sin nx$ é uma função ímpar e portanto seu produto é uma função ímpar. Assim,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx] \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n \cos nx}{n^2}
\end{aligned}
$$

ii) Note que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right) = \frac{1}{\pi}.\pi = 1$$

E,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} 1.\cos nx dx\right) = \frac{1}{\pi}.\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} = 0$$

Por fim, temos que:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0.\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} 1.\sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi}.\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}.(\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}$$

ou seja,

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{2}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Assim,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + ...$$

□

Exercício 7. *Determine a soma das séries :*

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Solução. iii) Do Exercício 6 (i) obtemos que a série de Fourier do $s(x)$ associada pra função $f(x) = x^2$ é dada por

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Portanto substituindo $x = 0$ na igualdade $f(0) = s(0)$ obtemos que

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

iv) Como no item anterior, considere $f(x) = x^2$, e tome $x = \pi$, então obtemos que

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Daí obtemos que $4\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2}{3}\pi^2$ e segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□