# REGRA DA CADEIA E DIFERENCIAÇÃO IMPLÍCITA

Disciplina de Cálculo II (LOB1004)
Profa. Responsável: Diovana Napoleão
Escola de Engenharia de Lorena EEL-USP
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

# REGRA DA CADEIA

**A Regra da Cadeia para uma função de única variável nos fornece uma regra para derivar uma função composta: Se y=f(x) e x=g(t), onde f é g são funções diferenciáveis, então y é uma função indiretamente diferenciável de t,**

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

**Para as funções de mais de uma variável, a regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de diferenciação de uma função composta.**

# REGRA DA CADEIA

A primeira versão (Teorema 2), considerando z = f(x, y) e cada uma das variáveis x e y é, por sua vez, uma função de duas variáveis t. Isso significa que z é indiretamente uma função de t,
z = f(g(t), h(t)). A Regra da Cadeia dará uma fórmula para diferenciar z como uma função de t, presumindo que f é diferenciável,

$\boxed{2}$ **A Regra da Cadeia (Caso 1)** Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de $x$ e $y$, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de $t$. Então $z$ é uma função diferenciável de $t$ e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

# REGRA DA CADEIA

Como frequentemente escrevemos $\partial z/\partial x$ no lugar de $\partial f/\partial x$, podemos reescrever a Regra da Cadeia na forma

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

# REGRA DA CADEIA

Será considerado agora a situação onde z = f(x, y), mas x e y são funções de outras duas variáveis s e t: x = g(s, t), y = h(s, t). Então z é indiretamente uma função de s e t e desejamos determinar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$. Para calcular $\frac{\partial z}{\partial t}$ mantemos fixo o s e calculamos a derivada ordinária de z em relação a t. Portanto, obtém-se:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

# REGRA DA CADEIA

**3** **A Regra da Cadeia (Caso 2)** Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de $x$ e $y$, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de $s$ e $t$.

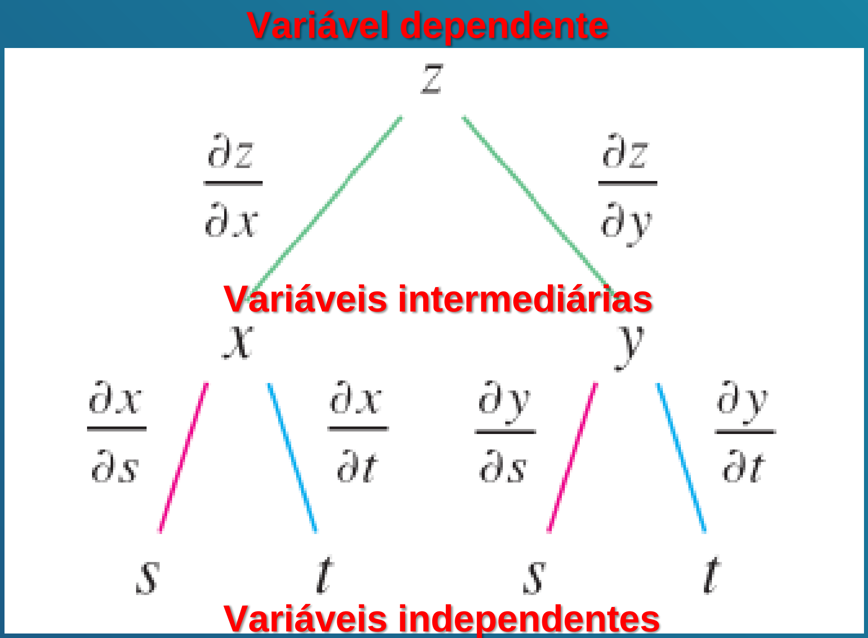
Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

**Para o caso 2, a Regra da Cadeia contém 3 tipos de variáveis: s e t são variáveis independentes, x e y são as variáveis intermediárias e z é a variável dependente.**

# REGRA DA CADEIA

**Para a Regra da Cadeia considerando o caso anterior, observa-se um termo para cada variável intermediária. Está representação relaciona-se como Diagrama de Árvore.**



# REGRA DA CADEIA

Consideremos agora a situação mais geral, na qual a variável dependente *u* é uma função de *n* variáveis intermediárias $x_1, \ldots, x_n$, cada uma das quais, por seu turno, é função de *m* variáveis independentes $t_1, \ldots, t_m$. Observe que existem termos, um para cada variável intermediária. A demonstração é semelhante à do Caso 1.

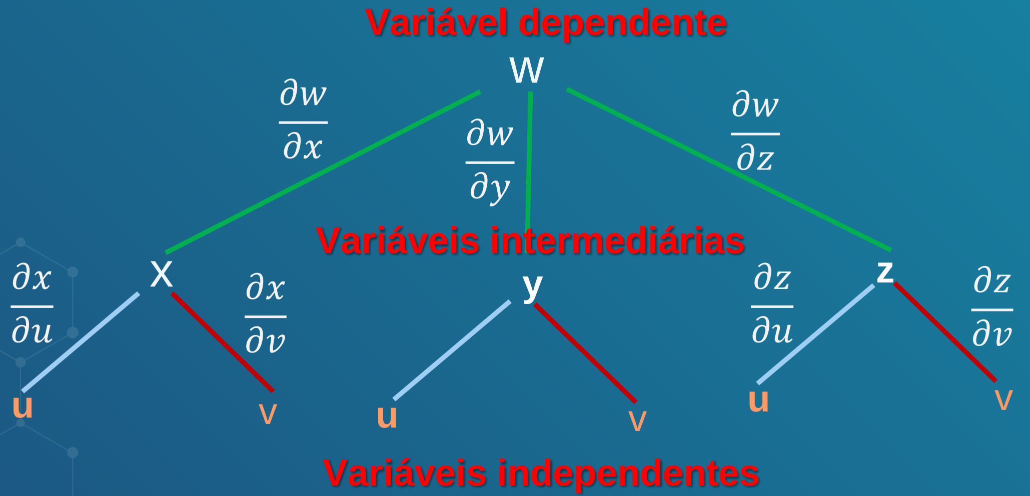
**4** **A Regra da Cadeia (Versão Geral)** Suponha que $u$ seja uma função diferenciável de $n$ variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e cada $x_j$ é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Então $u$ é uma função de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

# REGRA DA CADEIA

**Considerando um outro tipo de caso em que x = x(u, v), y = y(u, v) e z = z(u, v) com derivadas parciais de 1ª ordem no ponto (u, v), e se w = f(x, y, z) for diferenciável no ponto (x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u,v)), então w = f(x(u, v), y(u, v), z(u,v)) terá derivadas de 1ª ordem no ponto (u,v) de acordo com seguinte esquema,**



# DIFERENCIAÇÃO IMPLÍCITA

**A Regra da Cadeia pode fornecer uma descrição mais completa do processo de diferenciação implícita. Supomos que uma equação da $F(x, y) = 0$ define y implicitamente como uma função diferenciável de x, isto é, $y = f(x)$, onde $F(x, f(x)) = 0$ para todo x no domínio de f. Se F é diferenciável, pode-se aplicar o Caso 1 da Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$ com relação a x.**

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

# DIFERENCIAÇÃO IMPLÍCITA

No entanto, $dx/dx = 1$, então, se $\partial F/\partial x \neq 0$ resolvemos para $dy/dx$ e obtem-se,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

# DIFERENCIAÇÃO IMPLÍCITA

## TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

**Este Teorema foi comprovado no Cálculo Avançado e possibilita condições sob as quais essa suposição é válida. O teorema afirma que se *F* é definida em um bola aberta contendo ($x_0$, $y_0$), onde *F* ($x_0$, $y_0$) = 0, *Fy* ($x_0$, $y_0$) ≠ 0 e *Fx* e *Fy* são funções contínuas nessa bola, então a equação *F* (*x*, *y*) = 0 define como uma função de *x* perto do ponto ($x_0$, $y_0$) e a derivada dessa função é dada pela equação anterior.**

**Analogamente, se F é diferenciável, pode-se aplicar o Caso 1 da Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação F(x, y) = 0 com relação a y. Obtém-se a seguinte equação,**

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{Fy}{Fx}$$

# DEFINIÇÃO DO DETERMINANTE JACOBIANO (J)

O jacobiano da transformação $T$ dada por

$$x = X(u, v) \quad \text{e} \quad y = Y(u, v),$$

é

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}.$$

# DETERMINANTE JACOBIANO (J)

## Exemplo para calcular o determinante Jacobiano

No sistema de coordenadas polares, temos

$$x = X(r, \theta) = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = Y(r, \theta) = r\,\text{sen}\,\theta.$$

O jacobiano da transformação é

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\,\theta = r.$$