

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

1. MATRIZES

Vamos denotar matrizes por letras maiúsculas em negrito, como **A**, **B**, **C** etc. Lembremos que uma matriz $m \times n$ A é um arranjo retangular de $m \times n$ elementos com m linhas e n colunas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Estaremos interessados principalmente em matrizes com *entradas* a_{ij} sendo números reais mas, para a teoria, especialmente para estudo dos autovalores e autofunções, é mais conveniente considerar matrizes com coeficients sendo, em geral, números *complexos*. Vamos também denotar por $\mathbf{A} = (a_{ij})$, a matriz **A** cuja entrada na i -ésima linha e j -ésima coluna é a_{ij} .

Dada a matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$, definimos

- A matriz $n \times m$ *transposta* $\mathbf{A}^t = (a_{ji})$.
- A matriz $m \times n$ *conjugada* $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{ij})$, sendo $(\bar{a})_{ij}$ o complexo conjugado de $(a)_{ij}$.
- A matriz $n \times m$ *adjunta* $\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^t = (\bar{a}_{ji})$.

Estaremos especialmente interessados em matrizes *quadradas* de ordem n isto é matrizes com o mesmo número n de linhas e colunas e matrizes com apenas 1 coluna ou *vetores coluna*.

Podemos definir diversas operações entre matrizes:

- Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ é matriz $m \times n$, e $\lambda \in \mathbb{C}$. definimos a matriz *produto por escalar* $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{A} = (c_{ij}) = (\lambda a_{ij})$.
- Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ são matrizes $m \times n$, definimos a *matriz soma* $\mathbf{C} = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.
- Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ é matriz $m \times l$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ é matrizes $l \times n$, definimos a *matriz produto* $m \times n$, $\mathbf{C} = (c_{ik}) = (\sum_j a_{ij} b_{jk})$.

(Vamos supor conhecidas as propriedades dessas operações).

A *matriz identidade* de ordem n $\mathbf{I} = d_{ij}$ é a única matriz tal que $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$, para toda matriz quadrada de ordem $\mathbf{A}$. Não é difícil mostrar que $d_{ij} = \delta_{ij}$.

Dizemos que a matriz quadrada de ordem n , $\mathbf{A}$ é *não singular* ou invertível, se existe uma matriz de ordem n , $\mathbf{A}^{-1}$, denominada, a *matriz inversa* de $\mathbf{A}$; tal que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Definimos o $\det \mathbf{A}$ da matriz quadrada de ordem n , $\mathbf{A} = (a)_{ij}$, por:

$$\det \mathbf{A} = \Pi_{\sigma} \Pi_i (-1)^{s(\sigma)} (a_{i\sigma(i)}),$$

onde σ varia no conjunto das permutações de n elementos e $s(\sigma)$ é a paridade de σ .

O determinante de $\mathbf{A}$ pode ser calculado de maneira recursiva:

- (1) Se $n = 1$, então $\det \mathbf{A} = a$, sendo a a única entrada de $\mathbf{A}$.
- (2) Se $n \geq 2$, $\det \mathbf{A} = \sum_i -1^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{M}_{ij} = \sum_j -1^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{M}_{ij}$, sendo $\mathbf{M}_{ij}$ a matriz obtida suprimindo-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna de $\mathbf{A}$.

O número $C_{ij} = -1^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{M}_{ij}$ é denominado *cofator* de a_{ij} . Se $\mathbf{C} = (C_{ij})$ e $\det \mathbf{A} \neq 0$, a inversa de $\mathbf{A}$ é dada por $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{C}^t$.

2. SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Consideremos agora o sistema linear com n equações e n incógnitas:

$$\begin{aligned}
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 (1) \quad & \vdots \\
 & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
 \end{aligned}$$

Na forma matricial, temos o sistema

$$(2) \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

O sistema

$$(3) \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{0},$$

é o sistema *homogêneo* associado ao sistema (não homogêneo) (2).

Proposição 1. *Quanto às soluções dos sistemas (2) e (3), temos a seguinte alternativa:*

- Se $\mathbf{A}$ é invertível, então ambos os sistemas têm uma única solução, dada por $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
- Se $\mathbf{A}$ é singular, o sistema (3) tem infinitas soluções e o sistema (2) tem solução, se e somente se $\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle = 0$ para toda solução $\mathbf{y}$ do problema homogêneo adjunto:

$$(4) \quad \mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

Nesse caso, as soluções de (2) são todas da forma: $\mathbf{b} = \mathbf{x}_p + \xi$, sendo $\mathbf{x}_p$ uma solução fixada de (2) e ξ uma solução qualquer do sistema homogêneo associado (3).

Como consequência da Proposição (1)

3. AUTOVALORES E AUTOVETORES DE MATRIZES

Definição 2. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz $n \times n$.

Dizemos que o escalar λ é um autovalor de $\mathbf{A}$ se existir um vetor

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \neq 0$, tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. O vetor $\mathbf{v}$ é denominado então um autovetor associado a λ .

Agora, λ é autovalor e $\mathbf{v}$ autovetor associado se e somente se $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$, sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade $n \times n$. Lembrando que a equação: $\mathbf{B}\mathbf{x}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ tem solução não trivial, se e somente se o $\det \mathbf{B} = 0$, obtemos a

Proposição 3. Um escalar λ é autovalor da matriz $\mathbf{A}$, se e somente se $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

A equação $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ é a *equação característica* de $\mathbf{A}$ e os autovalores são também chamados *valores característicos* de $\mathbf{A}$.

Observemos que $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ é um polinômio de grau n em λ , denominado *polinômio característico* de $\mathbf{A}$ e os autovalores são de $\mathbf{A}$ são, portanto, as n raízes (contadas com multiplicidade) do polinômio característico.

Exemplo 4. *Encontrar os autovalores e autovetores da matriz:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 6.$$

Portanto, os autovalores de $\mathbf{A}$ são -2 e 6 .

Para encontrar os autovetores associados a -2 , devemos resolver a equação:

$$\begin{bmatrix} 1 - (-2) & 3 \\ 5 & 3 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daí obtemos $3x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.

Atribuindo um valor arbitrário (não nulo) a x , obtemos um autovetor associado a $\lambda = -2$. Por exemplo, se $x = 1$, obtemos $y = -1$. e temos o autovetor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Qualquer outro autovetor associado a $\lambda = -2$. será um múltiplo não nulo de v_1 .

Para encontrar os autovetores associados a 6 , devemos resolver a equação:

$$\begin{bmatrix} 1 - (6) & 3 \\ 5 & 3 - (6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daí obtemos $-5x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = (5/3)x$.

Atribuindo um valor arbitrário (não nulo) a x , obtemos um autovetor associado a $\lambda = 6$. Por exemplo, se $x = 3$, obtemos $y = 5$. e temos o autovetor $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Qualquer outro autovetor associado a $\lambda = 6$. Será um múltiplo não nulo de v_2 .

Proposição 5. *Uma combinação linear de autovetores de uma matriz $\mathbf{A}$ associados ao mesmo autovalor λ é um autovetor associado a λ (ou é o vetor nulo).*

Em outras palavras o conjunto formado pelos autovetores associados a um mesmo autovalor é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, denominado autoespaço associado a λ .

Proposição 6. *Autovetores de uma matriz $\mathbf{A}$ associados a autovalores distintos são sempre linearmente independentes.*

Prova. Por indução sobre o número n de autovalores distintos. Para $n = 1$, o resultado é imediato. Suponhamo-lo verdadeiro para $n = k$. Então se $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ são autovetores associados respectivamente aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$ distintos dois a dois, sejam $c_1, c_2, \dots, c_{k+1}$ escalares tais que $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{k+1} v_{k+1} = 0$. Aplicando a matriz A , obtemos o sistema:

$$(5) \quad \begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{k+1} v_{k+1} &= 0. \\ c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação em (5) por λ_{k+1} e subtraindo da segunda, obtemos $(\lambda_{k+1} - \lambda_1)c_1 v_1 + (\lambda_{k+1} - \lambda_2)c_2 v_2 + \dots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k)c_k v_k = 0$. Da hipótese de indução, obtemos, $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Usando novamente a primeira equação em (5), segue que $c_{k+1} = 0$. $\square$

Suponhamos agora que a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ tenha

n autovetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearmente independentes (Da proposição 6 isto sempre ocorre se as n raízes do polinômio característico são todas distintas.)

$$\text{Se } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_n^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^n & v_2^n & \cdots & v_n^n \end{bmatrix}, \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}v_1 & \mathbf{A}v_2 & \cdots & \mathbf{A}v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B} \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, ou seja, a matriz $\mathbf{A}$ é *semelhante* à matriz *diagonal* com seus autovalores na diagonal principal. A *matriz de semelhança* $\mathbf{B}$ é a matriz cujas colunas são os n autovetores L.I. de $\mathbf{A}$.

Se não existirem n autovetores linearmente independentes a matriz $\mathbf{A}$ não será semelhante a uma matriz diagonal. Para descrever o que ocorre neste caso, consideremos novamente o polinômio característico de $\mathbf{A}$.

$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ o polinômio característico de $\mathbf{A}$. Então $p(\lambda)$ pode ser decomposto como produto de termos de grau 1.

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, sendo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ as raízes de p (complexas, algumas eventualmente repetidas).

Definição 7. A *multiplicidade algébrica* de λ_i é o número de vezes que λ_i se repete na decomposição acima.

A *multiplicidade geométrica* de λ_i é a dimensão do autoespaço associado a λ_i .

Podemos ver então que a existirá uma base formada por n autovetores de $\mathbf{A}$ se, e sómente se a multiplicidade algébrica de cada autovalor λ_i coincidir com sua multiplicidade geométrica. Se isto não ocorrer o “melhor que podemos fazer é encontrar uma base formada por *autovetores generalizados* de $\mathbf{A}$.

Definição 8. *Diremos que v é autovetor generalizado de $\mathbf{A}$, associado ao autovalor λ se uma das seguintes alternativas ocorrer:*

- v é autovetor de $\mathbf{A}$.
- $(\mathbf{A} - \lambda)v = w$, sendo w um autovetor generalizado de $\mathbf{A}$.

Pode-se demonstrar que sempre existem n autovetores generalizados L.I. de $\mathbf{A}$. Usando este fato, um procedimento análogo ao descrito acima, permite mostrar que $\mathbf{A}$ é sempre semelhante a uma matriz da forma $\mathbf{D} + \mathbf{N}$ sendo $\mathbf{D}$ uma matriz na forma diagonal com os autovalores de $\mathbf{A}$ na diagonal $\mathbf{N}$ é uma matriz *nilpotente* de ordem $m \leq n$, isto é, $\mathbf{N}^m = 0$ e $\mathbf{D}$ e $\mathbf{N}$ *comutam*, isto é, $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$.

Para evitar complicações na notação, vamos apenas ilustrar o procedimento para um caso particular. Suponhamos que $n = 3$ e $\mathbf{A}$ possui um único autovalor λ de multiplicidade geométrica 1. Nesse caso existirá um autovalor v_1 associado a λ e autovetores generalizados v_2 e v_3 tais que:

$$Av_1 = \lambda v_1, Av_2 = \lambda v_2 + v_1, Av_3 = \lambda v_3 + v_2.$$

Se $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}v_1 & \mathbf{A}v_2 & \mathbf{A}v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 & \lambda v_2 + v_1 & \lambda v_3 + v_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{B} \\
&= \mathbf{B}(\mathbf{D} + \mathbf{N}).
\end{aligned}$$

Segue que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$, e as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{N}$, têm as propriedades afirmadas.