MAT0234 Medida e integração
IME-USP segundo semestre 2020
Modos de convergência

1. Definição : Sejam $f,\ f_n\ :\ (X,\mathcal{A},\mu)\to\ \mathbb{R}$. Dizemos $f_n\ \to\ f$ **converge em medida** para f se $\lim_{n\to+\infty}\ \mu(\{x;\ |f_n(x)\ -\ f(x)|>\alpha\})\ =\ 0,\ \forall\ \alpha\ \geq\ 0$. Escreveremos $f_n\to_\mu\ f$.
   Chamaremos $E_n\ (\alpha)\ =\{x;\ |f_n(x)\ -\ f(x)|>\alpha\}$.

2. Analogamente diremos que a sequência $f_n\ :\ (X,\mathcal{A},\mu)\to\ \mathbb{R}$ é **de Cauchy em medida** se dados $\epsilon\ >0$; $e\ \alpha\ >\ 0$ existir $N\ \in\ \mathbb{N}$ com $\mu(\{x;\ |f_n(x)\ -\ f_m(x)|>\alpha\})\ \leq\ \epsilon, \forall\, n,\ m\ \geq\ N$.

1. Seja $(X,\mathcal{X},\mu)$ espaco de medida finita. Dadas $f,g:X\to\mathbb{R}$ mensuráveis, defina:

$$\rho(f,g)=\int\frac{|f-g|}{1+|f-g|}d\mu$$

   Então, identificando funções que coincidem qtp., ρ define uma métrica no conjunto das funções mensuráveis e $f_n\to f$ com respeito a esta métrica $\Leftrightarrow$ $f_n\ \to\ f$ em medida.
   Solução: se $\rho(f_n,f)\to 0$ tomamos $A_{n,\epsilon}=\{x\in X\ com\ |f_n(x)-f(x)|>\epsilon\}$. Agora $\rho(f_n,f)\ \geq\ \int_{A_{n,\epsilon}}\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}d\mu\ =\ \int_{A_{n,\epsilon}}[1-\frac{1}{1+|f_n-f|}]d\mu\ \geq\ \mu(A_{n,\epsilon})\left[1-\frac{1}{1+\epsilon}\right]d\mu$. Como $\rho(f_n,f)\to 0$ então $\mu(A_{n,\epsilon})\to 0$.
   Recíprocamente, se $f_n\ \to\ f$ em medida então $\int_{A_{n,\epsilon}}[1-\frac{1}{1+|f_n-f|}]d\mu$

2. Suponha $|f_n|\leq g\in\ L^1$ e $f_n\to f$ em medida. Então:
   (a) $\int f=\lim\int f_n$.
   (b) $f_n\to f$ em L^1.

3. Convergência em L^p implica convergência em medida. Segue da Desigualdade de Chebyshev.

4. $f_n\to f$ em medida $\iff\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq N\,\mu(\{|f_n(x)-f(x)|\geq\epsilon\})<\epsilon$.

5. Se $(\forall n\in\mathbb{N})\,\mu(E_n)<\infty$ e $\chi_{E_n}\to f$ em L^1, então f coincide qtp. com a função característica de um conjunto mensurável.

6. Sejam $f_n,\ f:X\to\mathbb{C}$ mensuráveis e $\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.
   (a) Se ϕ for contínua e $f_n\to f$ qtp., então $\phi\circ f_n\to\phi\circ f$ qtp.

(b) Se ϕ for uniformemente contínua e $f_n \to f$ uniformemente (resp. quase uniformemente, em medida), então $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ uniformemente (resp. quase uniformemente, em medida).

7. Suponha $f_n \to f$ e $g_n \to g$ em medida (q.u.), f_n, g_n a valores reais.

   (a) $(f_n + g_n) \to f + g$ em medida (q.u.).

   (b) $f_n, g_n \to fg$ em medida (q.u.) se $\mu(X) < \infty$, mas não necessáriamente se $\mu(X) = \infty$.
   Solução:

      i. Mostre em primeiro lugar que se $\mu(X) < \infty$, dado $\delta > 0, \exists c > 0, com\ \mu(\{|f(x)| > c\}) < \delta$. E análogamente para g.
      Seja $A = \{|f(x)| > c \quad e\ |g(x)| > c\}, com\ \mu(A) < \delta$. Observe-se que $se\ \epsilon < |f_n g_n - fg| < |g||f_n - f| + |g_n - g||f_n - f| + |f||g_n - g| < c|f_n - f| + |g_n - g||f_n - f| + c|g_n - g|$.

      ii. No caso $\mu(X) = \infty$ seja $f_n = x + \dfrac{1}{n}; f = x$. Então $f_n \to f$ em medida (q.u.), mas $f_n^2 - f^2 = (2x\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}^2) \nrightarrow 0$ em medida (q.u.).

   (c) $f_n\ e\ g_n \to 0$ em medida (q.u.) então $f_n g_n \to 0$ em medida (q.u.).

8. Se $f_n \to f$ quase uniformemente, então $f_n \to f$ qtp. e em medida. Mas não necessariamente em L^p, $p \geq 1$.

9. No teorema de Egorov, a hipótese "$\mu(X) < \infty$" pode ser substituída por "$|f_n| \leq g$, onde $g \in L^1$".
   Solução: seja $A_{n,k} = \{x \in X / |f_j(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}$ para algum $j \geq n\}$. Então $A_{n,k}$ é decrescente. Mostremos que $\mu(A_{n,k}) < +\infty$. Com efeito, $\int_X 2g\, d\mu \geq \int_{A_{n,k}} 2g\, d\mu \geq \int_{A_{n,k}} |f_j(x) - f(x)|\, d\mu \geq \frac{1}{k}\, \mu(A_{n,k})$. E a demonstração segue como no Teorema de Egorov.

10. Se μ for σ-finita e $f_n \to f$ qtp, existem mensuráveis $E_1, E_2, \ldots \subset X$ tais que $\mu((\cup_1^\infty E_n)^c) = 0$ e $f_n \to f$ uniformemente em cada E_n.

11. Seja μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Então $f_n \to f$ em medida $\iff$ $f_n \to f$ uniformemente.

Contraexemplos em Tipos de Convergência

1. Convergência em medida não implica convergência em L^p. Com efeito, analise a sequência $f_n = n^{\frac{1}{p}} \chi_{(0, \frac{1}{n})}$.

2. Se $\mu(X) = +\infty$, convergência qtp não implica convergência em medida . Tome $g_n = \chi_{[n, +\infty)}$.

Considere as seguintes funções para construir contraexemplos das implicações de convergência:

1. $f_n = n^{-1} \chi_{(0,n)}$.

2. $g_n = \chi_{(n,n+1)}$.

3. $h_n = n\,\chi_{(0,\frac{1}{n})}$

4. seja a sequência em $[0,1]$ dada por $\phi_1 = \chi_{[0,1]}$, $\phi_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $\phi_3 = \chi_{[1/2,1]}$ e etc. Em geral $\phi_n = \chi_{[j,j+1]/2^k}$ onde $n = 2^k + j$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$ (dividimos o $[0,1]$ em 2^k intervalos e pegamos a função característica de cada um deles.
   Esta sequência é muito interessante. Com efeito, $\phi_n \to f$ em $L^p([0,1])$ e $\phi_n \xrightarrow{\mu} f$ onde $f \equiv 0$. Mas não converge q.u nem q.t.p. Mais ainda, para cada x é possível escolher uma subsequência ϕ_{n_j} que converge para g_x onde $g_x(x) = 1$ e $g_x(t) = 0$ se $x \neq t$.
   Tudo isso acontece em $X = [0,1]$ com medida finita, e dominada por ϕ_1.

5. O que acontece com a sequência $\psi_n = 2^k\,\phi_n$, onde a relação entre k e n é como acima?