Aula 14 – Equações diferenciais: equações separáveis e equações lineares

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Definição 1

Uma **equação diferencial separável** *é uma equação diferencial que pode ser escrita da forma*

$$(h \circ f) \cdot f' = g,$$

na variável f.

Teorema 1

Sejam f, g, h funções contínuas definidas em intervalos, com $dom(f) = dom(G)$ e f derivável. Sejam G e H primitivas de g e h, respectivamente. Suponha que f satisfaz

$$H(f(x)) = G(x),$$

para todo $x \in dom(f)$. Então f é solução da equação diferencial

$$(h \circ f) \cdot f' = g.$$

Demonstração: Segue imediatamente da regra da cadeia.

$\blacksquare$

Exemplo 1

Mostre que a equação de Malthus é separável e resolva através do teorema.

Notação do diferencial

- Usando a notação do diferencial escrevemos a equação $(h \circ f) \cdot f' = g$ como:
- $h(y) \cdot \dfrac{dy}{dx} = g(x)$, sendo $y = f(x)$.
- "Passando dx para o outro lado" temos:
- $h(y)dy = g(x)dx$ (argh!!!!).
- Integrando nos dois lados obtemos:
- $\int h(y)dy = \int g(x)dx$.

Exemplo 2

Resolva a equação $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2}$, *com a condição inicial* $y(1) = 2$.

Exemplo 3

Escreva a equação de Verhulst na notação do diferencial e resolva.

Equações diferenciais lineares

- Uma *equação diferencial linear* é uma equação diferencial da forma $f'(x) + p(x)f(x) = q(x)$.
- Na notação do diferencial: $\dfrac{dy}{dx} + py = q$.
- Equações desse tipo geralmente **não** são separáveis.

Resolução de equações lineares

- Precisamos encontrar uma função $I(x)$ conveniente para multiplicar os dois lados da equação.
- Pela regra do produto, $(I(x)f(x))' = I(x)f'(x) + I'(x)f(x)$.
- Nosso objetivo é encontrar uma função I tal que $I'(x) = I(x)p(x)$.
- Porque assim a equação $I(x)f'(x) + I(x)p(x)f(x) = I(x)q(x)$ fica:
- $(I(x)f(x))' = I(x)q(x)$.
- E a solução é: $f'(x) = \dfrac{\int I(x)q(x)dx}{I(x)}$.

- A função $I(x)$ é chamada **fator integrante** da equação.
- Para encontrarmos $I(x)$, resolvemos a seguinte equação separável:
- $I'(x) = I(x)p(x)$.
- Resolvendo essa equação obtemos a solução $I(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Resumo do método de resolução de equações lineares

Para resolvermos a equação $f'(x) + p(x)f(x) = q(x)$, na variável f, multiplicamos ambos os lados por $e^{\int p(x)dx}$ e integramos ambos os lados, usando regra do produto no lado esquerdo.

Exemplo 4

Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

Fim