AULAS ANTERIORES 13/11/2020

Autovalores e Autovetores:

Dado um OL $T: V \rightarrow V$, no caso em que $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$T(\vec{v}) = A\vec{v}$

$A = [T]_c$

matriz de transformação do OL

autovalor

autovetor associado ao autovalor λ

Autovalores: EC: $\det(A - \lambda I) = 0$, PC: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Autovetores: SLH: $(A - \lambda_i I)\vec{v_i} = \vec{0}$

Polinômio Mínimo: $m(x)$

* Mesmas raízes do PC, não necessariamente com a mesma ma(·).
* Polinômio que anula a matriz A do OL: $m(A) = 0$. → matriz nula
* PC é candidato a PM, pois anula A.
* PM é o de menor grau entre aqueles que anulam A.

Base de Autovetores: B

Base de um EV V, $\dim(V) = \underline{\underline{n}}$, formada por $\underline{\underline{n}}$ autovetores LI, associados ou não a autovalores todos distintos.

Operador Diagonalizável:

Um OL $T: V \rightarrow V$ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ $\exists$ base de autovetores.

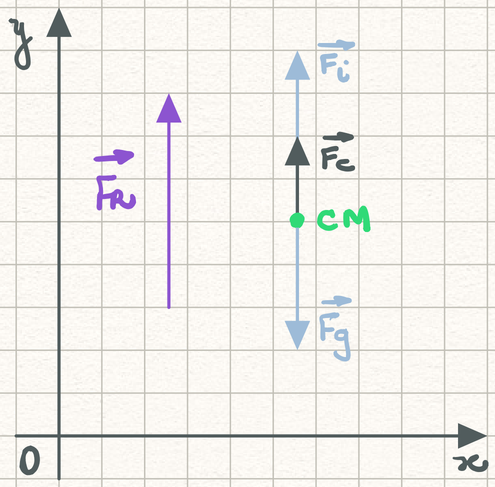
* Se $\boxed{\overbrace{\text{n. autovalores}}^{k} < \overbrace{\dim V}^{n}}$, o OL será diagonalizável se: ∃ pelo menos um λ_i / $ma(\lambda_i) > 1$

$$m(x) = (x - \lambda_1)^{1}(x - \lambda_2)^{1} \cdots (x - \lambda_k)^{1}$$

* $[T]_B$ ... matriz do OL na base B: $[T]_B = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$

n. vezes que λ_i aparece na diagonal = n. autovetores LI associados a ele

Slide 02 - Introdução



$$\vec{F_R} = \vec{F_c} + \vec{F_i} - \vec{F_g}$$

módulo

$$m \cdot a = c + bt - mg$$

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = c + bt - mg \quad (1)$$

A solução de (1) é simples:

Integrar a eq. 2 vezes e impor as condições iniciais
$$\begin{cases} y(\overset{t=0}{0}) = 0 \\ v(\underset{t=0}{0}) = \frac{dy}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

A $\underbrace{\text{eq. (1)}}_{\text{ED}}$ e as condições iniciais formam um Problema Valor Inicial (PVI).

Slide 04

$$f_2 = \underset{K}{\cancel{3}}e^{2t} \rightarrow \dot{f_2} = \underset{2K}{\cancel{6}}e^{2t} = 2\underbrace{\underset{K}{\cancel{3}}e^{2t}}_{f_2}$$

Seja: $\dot{f} - 2f = 0$ ou $\dot{f} = 2f$. Qual a solução $f(t)$?
Existe somente 1 solução?

$f_1(t) = e^{2t}$; mas também $f_2(t) = 3e^{2t}$.

OBSERVAÇÃO: Qual a solução geral da eq. do tipo $\dot{f} = af$?

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = af \underset{\text{equivale a}}{\longleftrightarrow} \frac{df}{dt} - af = 0 \longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{df}{dt} - af\right) \cdot e^{-at} = 0 \cdot e^{-at} \longleftrightarrow \frac{df}{dt}e^{-at} - afe^{-at} = 0$$

$$\longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(f \cdot e^{-at}\right) = 0 \longleftrightarrow f \cdot e^{-at} = K, \quad K \text{... constante}$$

$$\therefore \boxed{f = f(t) = Ke^{at}, \ K \in \mathbb{R}}$$

E qual seria a solução de $\ddot{f} - 3\dot{f} + 2f = 0$? $f(t)$?

Se for possível escrever a eq. acima de forma que $A = [T]_c$ seja conhecida, então a solução geral será da forma:

$$F(t) = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)$$, c_1 e c_2 ... constantes

c_1, c_2 ... definidas para um PVI
indefinidas para uma solução geral

$F_i(t) = \vec{v}_i e^{\lambda_i t}$ será solução $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_i \text{... autovalor de } A \\ \vec{v}_i \text{... autovetor associado a } \lambda_i \end{cases}$,

com A diagonalizável. Assim, garante-se que os autovetores são LI e, consequentemente, que existem soluções $F_i(t)$ independentes.

$$\ddot{f} - 3\dot{f} + 2f = 0 \; ; \; \dot{f} = \frac{df}{dt} \; , \; \ddot{f} = \frac{d^2f}{dt^2}$$

Para resolver a eq. acima, é necessário encontrar a matriz A que a representa e verificar se A é diagonalizável.

Com o objetivo de contornar a correlação entre $\dot{f}$ e $\ddot{f}$, será feita uma mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} x &= f \\ y &= \dot{f} \\ \dot{y} &= \ddot{f} \end{aligned} \longrightarrow y = \dot{x} \xrightarrow[\text{seguinte sistema em } x \text{ e } y]{\text{com isso, tem-se o}} \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} \quad (1)$$

$\ddot{f} = -2f + 3\dot{f}$

(1) matricialmente: $\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}}_{\dot{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{[T]_c = A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{F} \longrightarrow \dot{F} = AF, \; \dot{F} = \frac{dF}{dt}$

A solução desse sistema é um vetor $F = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, cujos elementos são funções que solucionam (1). Como a solução geral da eq. $\dot{f} = af$ é $f(t) = Ke^{at}$, procura-se uma solução análoga para o sistema (1):

$$F(t) = F = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} e^{\lambda t} \qquad (2)$$

Derivando F definida em (2):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \alpha e^{\lambda t} \\ \beta e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \alpha e^{\lambda t} \\ \lambda \beta e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

F será solução $\Leftrightarrow \dfrac{dF}{dt} = AF$. Portanto:

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} e^{\lambda t} = A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} e^{\lambda t} \longrightarrow \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Se $\vec{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, a eq. (3) pode ser reescrita como $A\vec{v} = \overset{T(\vec{v})}{\lambda \vec{v}}$, o que corresponde à eq. de autovalores e autovetores da matriz de transformação A, desde que A seja diagonalizável.

CONCLUSÃO:

$F_i(t) = \vec{v_i}\, e^{\lambda_i t}$ será solução de (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_i \ldots \text{ autovalor de } \underset{}{\overset{\text{diagonalizável}}{A}} \\ \vec{v_i} \ldots \text{ autovetor associado a } \lambda_i \end{cases}$

Autovalores: EC: $\det(A - \lambda I) = 0$ $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

$\underline{\underline{A}}$ tem ordem 2, logo $\dim(V) = 2$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\therefore$ garante-se que $\exists$ 2 autovetores LI e uma base de autovetores. Desta forma, $\underline{\underline{A}}$ é diagonalizável.

$\therefore F_i(t) = \vec{v_i}\, e^{\lambda_i t}$ será solução de (1), $\begin{cases} \lambda_i \ldots \text{autovalor de } A \\ \vec{v_i} \ldots \text{autovetor associado a } \lambda_i \end{cases}$

Autovetores: $(A - \lambda_i I)\vec{v_i} = \vec{0}$

$\lambda_1 = 1 \longrightarrow \vec{v_1} = (1,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow F_1 = \vec{v_1}\, e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}$

é uma solução de (1)

$\lambda_2 = 2 \longrightarrow \vec{v_2} = (1,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow F_2 = \vec{v_2}\, e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$

é a outra solução de (1)

$B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ forma base, portanto é LI. Consequentemente, F_1 e F_2 não são soluções múltiplas (chamadas soluções independentes do sistema). Assim, a solução geral do sistema (1) será a CL de F_1 e de F_2:

$$F = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 F_1 + c_2 F_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \ldots \text{constantes reais ou complexas}$$

Portanto, as soluções do sistema (1) são:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \\ y(t) = c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases} , \quad c_1, c_2 \ldots \text{ constantes}$$

Agora, desfazendo a mudança de variáveis:

$$x = f \quad e \quad f = f(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$$

é a solução procurada da eq. $\ddot{f} - 3\dot{f} + 2f = 0$.

OBSERVAÇÃO:

Da mudança de variáveis $\begin{cases} x = f = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \\ y = \dot{f} = c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases}$ e

$\ddot{f} = c_1 e^{t} + 4c_2 e^{2t}$.

Substituindo f, $\dot{f}$ e $\ddot{f}$ em $\ddot{f} - 3\dot{f} + 2f = 0$, tem-se:

$$(c_1 e^{t} + 4c_2 e^{2t}) - 3(c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t}) + 2(c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}) = 0$$

$$3c_1 e^{t} + 6c_2 e^{2t} - 3c_1 e^{t} - 6c_2 e^{2t} = 0$$

$$0 = 0 \longrightarrow$$ a eq. se verifica, logo, a solução está correta!