MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

Gabarito - Questão 5 - Prova 1

Eram 4 versões, com mesmo nível de dificuldade.

Versão 1. Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo do conjunto $A = \left\{ \dfrac{n^2-1}{2n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Justifique cuidadosamente sua resposta.

<u>Solução</u>:

(É sempre aconselhável atribuir valores $n = 1, n = 2, n = 3, \ldots$ para ter uma melhor ideia de como são os elementos de A.) Temos:

$$A = \left\{ 0, \frac{3}{8}, \frac{8}{18}, \frac{15}{32}, \ldots \right\}$$

- $\inf A$:

  Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

  $$1 \leq n \quad \Rightarrow \quad n \leq n^2 \quad \overset{(1<n<n^2)}{\Longrightarrow} \quad 0 \leq n^2 - 1 \quad \overset{(2n^2>0)}{\Longrightarrow} \quad 0 \leq \frac{n^2-1}{2n^2}$$

  A última desigualdade acima mostra duas coisas:

  (i) O conjunto A é limitado inferiormente e, como é não vazio, pelo axioma do sup, existe $\inf A$;

  (ii) 0 é um minorante de A, já que 0 é menor ou igual a cada elemento de A.

- Vamos agora provar que $\inf A = 0$:

  Já vimos que 0 é um minorante de A. Precisamos agora provar que 0 é o maior minorante de A.

  Note que $0 \in A$ pois para $n = 1$ tem-se $\dfrac{n^2-1}{2n^2} = \dfrac{1^2-1}{2} = 0$.

  Se $N > 0$ é um número real qualquer então N não poderá ser minorante de A pois existe um elemento de A, a saber, 0, que é menor do que N.

  Logo, 0 é o maior minorante de A, isto é, $0 = \inf A$.

- $\sup A$:

  Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

  $$\frac{n^2-1}{2n^2} = \frac{n^2}{2n^2} - \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}$$

  Temos:

  (i) O conjunto A é limitado superiormente. Logo, pelo axioma do sup, existe $\sup A$;

  (ii) $\dfrac{1}{2}$ é um majorante de A.

- Falta provar que $\sup A = \dfrac{1}{2}$. (Esta é a parte difícil da questão.)

  Seja $M < \dfrac{1}{2}$ um número real qualquer. (Vamos provar que M não é majorante de A encontrando um elemento de A maior do que M. Mas note que os elementos de A têm uma forma específica que depende dos <u>naturais</u> ... Como encontrar esse elemento?)

  A <u>propriedade arquimediana</u>, garante que existe um natural k tal que $k > \dfrac{1}{\frac{1}{2} - M}$ (> 0). Como $2k^2 > k$, tem-se $2k^2 > \dfrac{1}{\frac{1}{2} - M}$.

Tomando o inverso dos dois lados temos $\dfrac{1}{2k^2} < \dfrac{1}{2} - M$. Logo, $M < \underbrace{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2k^2}}_{\in A}$.

Assim, encontramos um elemento de A, a saber $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2k^2} = \dfrac{k^2-1}{2k^2}$, que é maior do que M. Logo M não é um majorante de A.

Como isso vale para qualquer $M < \frac{1}{2}$, podemos então concluir que $\dfrac{1}{2}$ é o menor majorante de A, ou seja,

$$\frac{1}{2} = \sup A$$

Versão 2 Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo do conjunto $A = \left\{ \dfrac{n^2-1}{3n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Justifique cuidadosamente sua resposta.

Solução:

A única diferença entre esta versão e a anterior é o número 3 no denominador ao invés de 2. A solução é exatamente a mesma, bastando fazer pequenas adaptações.

Neste caso,

$$\boxed{\inf A = 0 \text{ e } \sup A = \frac{1}{3}}$$

Para provar que $\dfrac{1}{3}$ é o menor majorante de A, dado $M < \frac{1}{3}$ qualquer, basta escolher um natural k tal que $k > \dfrac{1}{\frac{1}{3} - M}$ (tal k existe, pela propriedade arquimediana). O restante das contas é análogo.

Versão 3 Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo do conjunto $A = \left\{ \dfrac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Justifique cuidadosamente sua resposta.

Solução: Atribuindo valores $n = 1, n = 2, n = 3, \ldots$ obtemos:

$$A = \left\{ 0, \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{4}-1}{2\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}, \cdots \right\}$$

- $\inf A$:

  Como a função raiz quadrada é crescente, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

  $$1 \leq \sqrt{n} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{n} - 1 \quad \overset{(2\sqrt{n}>0)}{\Longrightarrow} \quad 0 \leq \frac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}}$$

  A última desigualdade acima mostra duas coisas:

  (i) O conjunto A é limitado inferiormente e, como é não vazio, pelo axioma do sup, existe $\inf A$;

  (ii) 0 é um minorante de A, já que 0 é menor ou igual a cada elemento de A.

- Vamos agora provar que $\inf A = 0$:

  Já vimos que 0 é um minorante de A. Precisamos agora provar que 0 é o maior minorante de A.

  Note que $0 \in A$ pois para $n = 1$ tem-se $\dfrac{\sqrt{1}-1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1-1}{2} = 0$.

  Se $N > 0$ é um número real qualquer então N não poderá ser minorante de A pois existe um elemento de A, a saber, 0, que é menor do que N.

  Logo, 0 é o maior minorante de A, isto é, $0 = \inf A$.

- $\sup A$:

  Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:
$$\frac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}$$

  Temos:

  (i) O conjunto A é limitado superiormente. Logo, pelo axioma do sup, existe $\sup A$;

  (ii) $\dfrac{1}{2}$ é um majorante de A.

- Falta provar que $\sup A = \dfrac{1}{2}$. (Esta é a parte difícil da questão.)

  Seja $M < \dfrac{1}{2}$ um número real qualquer. (Vamos provar que M não é majorante de A encontrando um elemento de A maior do que M. Mas note que os elementos de A têm uma forma específica que depende dos <u>naturais</u> ... Como encontrar esse elemento?)

  A <u>propriedade arquimediana</u>, garante que existe um natural k tal que $k > \dfrac{1}{(1-2M)^2}$ (> 0).

  Como $M < \dfrac{1}{2}$, tem-se $1 - 2M > 0$. Logo, podemos escrever
$$\sqrt{k} > \frac{1}{1-2M} \iff \sqrt{k}(1-2M) > 1 \iff \sqrt{k} - 1 > 2M\sqrt{k} \iff \underbrace{\frac{\sqrt{k}-1}{2\sqrt{k}}}_{\in A} > M$$

  Assim, encontramos um elemento de A que é maior do que M. Logo M não é um majorante de A.

  Como isso vale para qualquer $M < \frac{1}{2}$, podemos então concluir que $\dfrac{1}{2}$ é o menor majorante de A, ou seja,
$$\frac{1}{2} = \sup A$$

Versão 4

Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo do conjunto $A = \left\{ \dfrac{\sqrt{n}-1}{3\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Justifique cuidadosamente sua resposta.

<u>Solução</u>: A única diferença entre esta versão e a anterior é o número 3 no denominador ao invés de 2. A solução é exatamente a mesma, bastando fazer pequenas adaptações.

Neste caso,
$$\boxed{\inf A = 0 \text{ e } \sup A = \frac{1}{3}}$$

Para provar que $\dfrac{1}{3}$ é o menor majorante de A, dado $M < \frac{1}{3}$ qualquer, basta escolher um natural k tal que $k > \dfrac{1}{(1-3M)^2}$ (tal k existe, pela propriedade arquimediana). O restante das contas é análogo.

Comentários e observações.

1. Na demonstração de que $\frac{1}{2}$ é o menor majorante de A da versão 1, poderíamos ter escolhido um natural k tal que $k > \dfrac{1}{\sqrt{1-2M}}$.

   Nesse caso, teríamos

   $$k^2 > \frac{1}{1-2M} \iff (1-2M)k^2 > 1 \iff k^2 - 1 > 2Mk^2 \iff \underbrace{\frac{k^2-1}{2k^2}}_{\in A} > M$$

   Analogamente para a demonstração de que $\frac{1}{3}$ é o menor majorante de A da versão 2 da prova, pode-se tomar $k > \dfrac{1}{\sqrt{1-3M}}$.

2. Quase ninguém se lembrou de justificar a <u>existência</u> do ínfimo e do supremo! Fazia parte da questão!

3. O objetivo da questão era saber se vocês aprenderam o que foi ensinado em aula sobre supremo e ínfimo, sem grandes surpresas. Apenas exercício de rotina.

   Entre outras coisas, eu esperava encontrar - tanto para inf como para sup - as justificativas em 2 etapas, conforme ensinado: por exemplo, para provar que um número x é o ínfimo de um conjunto A temos que mostrar

   (i) que $x \leq a$ para todo $a \in A$ (x é um minorante de A) <u>e</u>

   (ii) que x é o maior minorante de A.

   Que fez apenas uma parte, ganhou nota parcial. É impossível fazer as duas coisas de uma vez só.

4. Em geral, não existe relação entre supremo ou ínfimo de um conjunto e limite de sequência. Essa <u>não é</u> uma solução a ser tentada. Nas aulas, nunca em nenhum momento fizemos nada parecido. Por que será?

   Para quem tentou assim, fica de lição de casa verificar que, para $C = \left\{2 + \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ tem-se:

   $$\inf C = 1\,, \quad \sup C = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad \lim \left[2 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 2$$

   Ou seja, <u>não tem relação</u> uma coisa com a outra!

5. Se tiverem mais alguma dúvida ou comentário, podem me escrever!