Exercício 1

Segundo estudos realizados, a proporção de árvores do tipo ipê em uma determinada floresta é 0,3. Um biólogo acredita que, com as recentes alterações climáticas, essa proporção aumentou. Para testar sua hipótese ele tomou uma amostra aleatória de 20 árvores dessa floresta, observando 9 árvores do tipo ipê.

(a) Especifique as hipóteses nula e alternativa adequadas ao problema.

(b) Qual será sua decisão ao nível de significância de 0,01?

(c) Suponha agora que o biólogo decide colher uma amostra de 100 árvores e observa 45 árvores do tipo ipê. Tire conclusões ao nível de significância de 0,01

(d) Compare os resultados dos itens b) e c). Eles são compatíveis? Justifique.

p - proporção de ipês em uma floresta com as recentes alterações climáticas

a) $H_0: p = 0{,}3$

$H_a: p > 0{,}3$

b) RC: $\hat{p} \geq p_c$ $\quad \hat{p} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ $\quad \alpha = 0{,}01$, $n = 20$

$$P(\hat{p} \geq p_c \mid p = 0{,}3) = P\left(\frac{\hat{p} - 0{,}3}{\sqrt{0{,}21/20}} \geq \frac{p_c - 0{,}3}{\sqrt{0{,}21/20}}\right) \simeq$$

Sob H_0, $\hat{p} \approx N\left(0{,}3, \frac{0{,}21}{20}\right)$

$$\simeq P\left(Z \geq \frac{p_c - 0{,}3}{0{,}1024}\right) = 0{,}01 \qquad \frac{p_c - 0{,}3}{0{,}1024} = 2{,}33$$

RC: $\hat{p} \geq \underbrace{0{,}3 + 2{,}33 \cdot 0{,}1024}_{p_c}$ $\qquad \hat{p} \geq 0{,}5385$

$$\hat{p}_{obs} = \frac{9}{20} = 0,45 < 0,5385$$

$\hat{p}_{obs} \notin RC$ não rejeitamos H_0 ao nível 0,01

b) Repetir o problema para $n = 100$ e $\hat{p}_{obs} = \frac{45}{100}$

Sob H_0, $\hat{p} \overset{\sim}{\sim} N\left(0{,}3,\ \frac{0{,}21}{100}\right)$

$$P(\hat{p} \geq p_c \mid p = 0{,}3) \simeq P\left(Z \geq \frac{p_c - 0{,}3}{\underbrace{\sqrt{\frac{0{,}21}{100}}}_{0{,}0458}}\right) = 0{,}01$$

$$\frac{p_c - 0{,}3}{0{,}0458} = 2{,}33 \qquad RC: \hat{p} \geq \underbrace{0{,}3 + 2{,}33 \cdot 0{,}0458}_{p_c} \qquad \hat{p} \geq 0{,}4067$$

$\hat{p}_{obs} = 0{,}45 \in RC$ rejeitamos H_0 ao nível 0,01.

d) Não há incompatibilidade porque embora $\hat{p}_{obs}$ seja o mesmo em ambos os casos, a margem de erro desse estimador é menor para amostra maior. Assim, embora a diferença $\hat{p}_{obs} - 0{,}3$ seja a mesma nos dois casos, o 2º teste é mais sensível, considerando a diferença $\hat{p}_{obs} - 0{,}3$ estatisticamente significante neste caso.

Exercício 2

Sabe-se que 95% do pacotes de pó de café empacotados por uma máquina têm peso entre 995 e 1015 g. Desconfia-se que a máquina está desregulada e que essa proporção pode ter diminuído. Tem-se a informação de que, de uma amostra de 150 pacotes de café produzidos nos últimos 30 minutos, 12 pacotes têm peso fora do intervalo esperado, ou seja, têm peso abaixo de 995 g ou acima de 1015 g. Com base nessa informação, será decidido se a produção deve ser interrompida para que a máquina sofra manutenção.

(a) Formule esse problema como um problema de teste de hipóteses acerca de uma proporção p.

(b) Interprete os erros tipo I e tipo II no contexto do problema.

(c) Qual é a conclusão, adotando α=2% ?

p - proporção de pacotes com peso correto

a) $H_0: p = 0{,}95$ a máquina está regulada

$H_a: p < 0{,}95$ a máquina está desregulada.

b) erro tipo I - rejeitar H_0 verdadeira $\Leftrightarrow$ considerar que a máquina está desregulada quando não está (Parada desnecessária)

erro tipo II - aceitar H_0 quando H_0 é falsa $\Leftrightarrow$ Considerar que a máquina está em perfeitas condições quando ela está desregulada.

c) $\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verd.})$

$= P(\hat{p} \leq p_c \mid p = 0{,}95)$

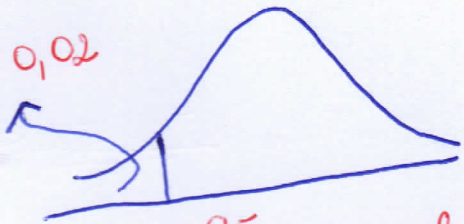
$\hat{p} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ $\qquad n = 150$

Sob H_0, $\hat{p} \approx N(0{,}95,\ 0{,}000317)$

$$0{,}02 = P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le \frac{p_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \,\middle|\, p = 0{,}95\right) \simeq$$

$$\simeq P\left(Z \le \frac{p_c - 0{,}95}{\sqrt{0{,}000317}}\right)$$

$Z \sim N(0,1)$



$$\frac{p_c - 0{,}95}{\sqrt{0{,}000317}} = -2{,}05$$

$p_c = 0{,}9135$

RC: $\hat{p} \le 0{,}9135$

$\hat{p}_{obs} = \frac{138}{150} = 0{,}92 \notin RC$, não rej. H_0. Ao nível de significância de 0,02, os dados sugerem que a máquina está regulada.

d) Se a maquina está desregulada e $p=0,9$, qual é a probabilidade desse problema não ser detectado?

$P(\text{erro do tipo II quando } p=0,9) = \beta(0,9)$

$\beta(0,9) = P(\text{aceitar } H_0 \mid p=0,9) = P(\hat{p} > 0,9135 \mid p=0,9)$

$\hookrightarrow \hat{p} > 0,9135$

$p = 0,9 \implies \hat{p} \approx N\left(0,9,\ \underbrace{\frac{0,9 \cdot 0,1}{150}}_{=0,0006}\right)$

$\simeq P\left(Z > \frac{0,9135 - 0,9}{\sqrt{0,0006}}\right) = P(Z > 0,54) = 0,2946$

Repetir para $p = 0,8$

$\frac{\hat{p} - 0,8}{\sqrt{\ }}$

$\beta(0,8) = P(\hat{p} > 0,9135 \mid p=0,8) \simeq P\left(Z > \frac{0,9135 - 0,8}{0,0326}\right)$

$p = 0,8 \implies \hat{p} \approx N\left(0,8,\ \underbrace{\frac{0,8 \cdot 0,2}{150}}_{0,00107}\right)$

$= P(Z > 3,48) = 0,00025$

Exercício 3 Exercício 8, pág. 298 Magalhães e Lima

Sabe-se que a concentração de cloro na urina de recém- nascidos tem distribuição normal com média 210 unidades e desvio padrão igual a 20 unidades. Sabe-se também que para recém- nascidos prematuros, essa concentração tem distribuição normal com mesmo desvio padrão, mas suspeita-se que a concentração média seja inferior. Para testar essa hipótese, será observada uma amostra de recém- nascidos prematuros com relação à quantidade de cloro na urina.

a) Formule as hipóteses adequadas para o problema.

b)Quantos recém - nascidos prematuros devem ser observados de modo que se tenha simultaneamente α= 10% e β(200)= 5%?

X - Concentração de cloro na urina dos prematuros

$X \sim N(\mu, 20^2)$

↳ supõe-se inferior a 210

a) $H_0: \mu = 210$

$H_a: \mu < 210$

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{20^2}{n}\right)$ $n = ?$

b) $\beta(200) = P(\text{erro tipo II} \mid \mu = 200) = 0,05$

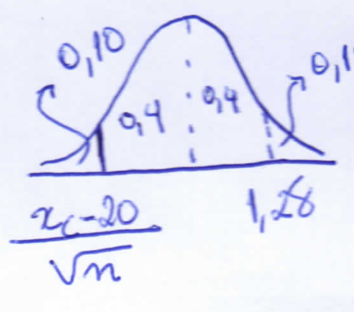
RC: $\bar{X} \leq x_c$

incógnitas x_c e n

$\alpha = 0,10 = P(\bar{X} \leq x_c \mid \mu = 210) = P\left(Z \leq \frac{x_c - 210}{20/\sqrt{n}}\right)$

$Z \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{x_c - 210}{20/\sqrt{n}} = -1,28$

$\frac{\bar{X} - 210}{20/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$



$$\beta(200) = P(\text{aceitar } H_0 \mid \mu = 200) =$$

$$= P(\bar{X} > x_c \mid \mu = 200) = P\left(Z > \frac{x_c - 200}{20/\sqrt{n}}\right) = 0{,}05$$

$$\bar{X} \sim N\left(200, \frac{20}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{x_c - 200}{20/\sqrt{n}} = 1{,}64 \qquad \frac{x_c - 210}{20/\sqrt{n}} = -1{,}28$$

$$\Rightarrow x_c = 205{,}61 \qquad n = 34{,}18 \simeq 35$$

Devem ser observados 35 prematuros.

RC : $\bar{X} \leq 205{,}61$