# Aula 8. Cadeias de Markov: medida invariante.

Anatoli Iambartsev
IME-USP

## Exemplo Introdutório.

Consideramos a seguinte matriz de transição: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ e calculamos $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^4$ e $\mathbf{P}^8$ :

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.64 \\ 0.32 & 0.68 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.3344 & 0.6656 \\ 0.3328 & 0.6672 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0.3333350 & 0.6666650 \\ 0.3333325 & 0.6666675 \end{pmatrix}.$$

Notamos que para todos os $i$'s, a probabilidade $p_{ij}^{(n)}$ converge (quando $n \to \infty$) para algum número que é o mesmo para todos os estados $i$. Em outras palavras, existe uma probabilidade limite de que o processo, depois de um número grande de passos, esteja no estado $j$, e esta probabilidade limite não depende do estado inicial. Para formular este teorema sobre a probabilidade limite, vamos precisar de propriedades adicionais de cadeia de Markov.

## Continuamos classificação de estados.

**Definição:** *Diz-se que o estado $i$ tem* **período** $d$ *se* $p_{ii}^{(n)} = 0$ *se e somente se $n$ não se divide em $d$, i.e. $n/d$ tem resto diferente de zero. Estado com $d = 1$ chama-se estado* **aperiódico**.

O passeio aleatório simples é um exemplo onde qualquer estado é periódico com $d = 2$. Seja $T_i$ o tempo de voltar para o estado $i$ começando do $i$ :

$$T_i = \min\{n > 0 : X_n = i\}, \quad X_0 = i.$$

**Definição:** *Se o estado $i$ é recorrente, então ele chama-se* **recorrente positivo** *se $\mathbb{E}(T_i) < \infty$. O estado $i$ chama-se estado* **ergódico,** *se este estado é aperiódico e recorrente positivo.*

## Teorema principal (ergódica).

Agora estamos prontos para formular o teorema principal de teoria de cadeias de Markov.

**Teorema:** *Para qualquer cadeia de Markov ergódica (todos os estados dela são ergódicos) o limite* $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ *existe e não depende do* $i$.

*Seja*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, \quad j \geq 0.$$

*Então o vetor* $\pi^T = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ *é solução única do seguinte sistema*

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \quad j \geq 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \end{cases}$$

## Teorema principal (ergódica). Observações.

(i) Notamos que a segunda equação do sistema mostra que o vetor $\pi$ é uma distribuição de probabilidade no conjunto de estados da cadeia de Markov em consideração.

(ii) Interpretamos o limite $\pi_j$ como a probabilidade do processo estar no estado $j$. Também pode ser interpretada como a fração de tempo que a cadeia passa no estado $j$ (teorema ergódico para cadeia de Markov).

(iii) Em caso de cadeia irredutível, recorrente positiva, mas *periódica*, mostra-se que $\pi = (\pi_j,\ j \geq 0)$ é uma solução única não-negativa da equação, mas, nesse caso $\pi_j$ não pode ser interpretada como a probabilidade limite (em caso de cadeia periódica não existe o limite $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$. Mas, neste caso, $\pi_j$ pode ser interpretada como a proporção de tempo que a cadeia de Markov visita o estado $j$.

**Exemplo 1.**

*Sabemos que se hoje chove, então, amanhã vai chover com probabilidade* $\alpha$, *e se hoje não chove, então, vai chover amanhã com probabilidade* $\beta$. *Construa uma cadeia de Markov correspondente e ache as probabilidades limite desta cadeia.*

**Exemplo 1. Solução.** *"chove" $\to$ "chove" com probabilidade $\alpha$, e "não chove" $\to$ "chove" com probabilidade $\beta$.*

Seja o estado "0" corresponde a um dia que chove, e o estado "1" quando não chove. A matriz de transição é

$$\mathbf{P} = \left| \begin{array}{cc} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{array} \right|.$$

Cadeia irredutível. As probabilidades limite é solução do sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^T \mathbf{P} = \pi^T \\ \sum \pi_j = 1 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = \pi_0 \alpha + \pi_1 \beta \\ \pi_1 = \pi_0 (1-\alpha) + \pi_1 (1-\beta) \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = \pi_0 \alpha + \pi_1 \beta \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = \pi_0 \alpha + (1-\pi_0)\beta \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = \frac{\beta}{1-\alpha+\beta} \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = \frac{\beta}{1-\alpha+\beta} \\ \pi_1 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}. \end{array} \right.$$

## Problema da ruína do jogador.

*Consideramos dois jogadores $A$ e $B$. O jogador $A$ ganha um jogo com probabilidade $p$ e recebe 1 real do parceiro $B$. O jogador $B$ ganha um jogo com probabilidade $q = 1 - p$ e recebe 1 real do seu parceiro. Não tem empate neste jogo. Todos as apostas são independentes. Seja $N$ o número total de reais que os jogadores têm. O jogo vai parar quando um dos dois jogadores fica com todos os $N$ reais.*

*Achar a probabilidade de jogador $A$ ganhar o jogo, se ele começa com $i$ reais.*

## Problema da ruína do jogador. Solução.

Se $X_n$ é a grana do jogador $A$ depois da $n$-ésima aposta, então, $X_n$ forma uma cadeia de Markov com estados $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ e probabilidades de transições

$$p_{00} = p_{NN} = 1, \quad p_{i,i+1} = p, \quad p_{i,i-1} = q = 1 - p,$$

A cadeia possua três classes: $\{0\}, \{1, 2, \ldots, N-1\}$ e $\{N\}$. Classes $\{0\}$ e $\{N\}$. são recorrentes. A segunda classe é transitória, isso significa, que o jogo acaba (em tempo finito), i.e., com probabilidade 1 ou $A$ ou $B$ estará com toda grana.

## Problema da ruína do jogador. Solução.

Seja $P_i$ probabilidade de que o jogador $A$ ganhe o jogo, dado que ele começou com $i$ reais:

$$P_i = \mathbb{P}(\exists n : \; X_n = N \mid X_0 = i).$$

Condicionando pelo resultado da primeira jogada, obtemos

$$\begin{aligned} P_i =& \mathbb{P}(\exists n : \; X_n = N \mid X_1 = i+1)\mathbb{P}(X_1 = i+1 \mid X_0 = i) \\ &+ \mathbb{P}(\exists n : \; X_n = N \mid X_1 = i-1)\mathbb{P}(X_1 = i-1 \mid X_0 = i) \\ =& pP_{i+1} + qP_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Reescrevemos isso de outra forma, usando o fato que $p+q=1$ :

$$\begin{aligned} &(p+q)P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \\ &\qquad \Rightarrow P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

## Problema da ruína do jogador. Solução.

A probabilidade $P_0$ é igual a zero, logo

$$P_2 - P_1 = \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1$$

$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1$$

$$\vdots$$

$$P_i - P_{i-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1$$

$$\vdots$$

$$P_N - P_{N-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} P_1.$$

Logo

$$P_i - P_1 = P_1\left[\left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

ou

$$P_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)}P_1, & \text{se } \frac{q}{p} \neq 1 \\ iP_1, & \text{se } \frac{q}{p} = 1. \end{cases}$$

**Problema da ruína do jogador. Solução.**

$$P_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} P_1, & \text{se } \frac{q}{p} \neq 1 \\ iP_1, & \text{se } \frac{q}{p} = 1. \end{cases}$$

Usando $P_N = 1$, obtemos

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1-(q/p)}{1-(q/p)^N}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{N}, & \text{se } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, segue que

$$P_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N}, & \text{se } p = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

**Problema da ruína do jogador. Solução.**

Notamos que se $N \to \infty$

$$P_i \longrightarrow \begin{cases} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, & \text{se } p > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } p \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se a probabilidade de ganhar numa jogada é maior de que 50%, então, a probabilidade de que a quantia de reais cresce para sempre é positiva. Este tipo de jogo as vezes chama-se um jogo com o Universo (ou Natureza).

**Problema da ruína do jogador. Exemplo 2.**

Suponha que $A$ é mais esperto do que $B$: $A$ ganha uma aposta com probabilidade $p = 0.6$. Qual é a probabilidade de que o jogador $A$ ganhe a banca se ele começa com 5 reais, enquanto o jogador $B$ começa com 10 reais? E se $A$ começa com 10 reais e $B$ começa com 20 reais?

A probabilidade desejada pode ser calculada através da fórmula, usando $i = 5, N = 15$, e $p = 0.6$. Assim, obtemos que a probabilidade é

$$P_5 = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^5}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{15}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{15}} \approx 0.87.$$

A outra probabilidade é

$$\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{30}} \approx 0.98.$$

## Processo de ramificação.

Supomos que um indivíduo gera $k$ filhos com probabilidade $p_k$. Seja $X_0$ o número inicial de indivíduos e suponha que cada indivíduo gera filhos independentemente um do outro. Filhos de $X_0$ indivíduos formam a primeira geração $X_1$, filhos da primeira geração formam segunda geração $X_2$, etc. $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ forma uma cadeia de Markov com estados $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Notamos que o estado 0 é um estado absorvente ($p_{00} = 1$).

Notamos também que se $p_0 > 0$, então todos os outros estados são transitórios (porque a probabilidade de acessar o estado absorvente é positiva $p_{i0} = p_0^i$). Assim, se $p_0 > 0$, então, a população ou vai ser extinta ou vai crescer até o infinito.

## Processo de ramificação.

Sejam $\mu$ e $\sigma^2$ a média e variância do número de filhos.

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \qquad \sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\mu)^2 p_k$$

Calculamos a média e a variância de $X_n$. Notamos que $X_n$ pode ser representado da seguinte forma:

$$X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_k,$$

onde $Z_k$ representa o número de filhos do $k$-ésimo indivíduo da $(n-1)$-ésima geração. Temos

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n \mid X_{n-1})) = \mathbb{E}\Bigg(\mathbb{E}\Bigg(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_k \;\Bigg|\; X_{n-1}\Bigg)\Bigg) = \mathbb{E}(X_{n-1}\mu) = \mu\mathbb{E}(X_{n-1}).$$

A última equação nos diz que se $X_0 = 1$, então $\mathbb{E}(X_n) = \mu^n$.

## Processo de ramificação. Exercício 2.

*Prove que*

$$\mathbb{V}ar[X_n] = \begin{cases} \sigma^2\mu^{n-1}\left(\frac{\mu^n-1}{\mu-1}\right), & \textit{if } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2, & \textit{if } \mu = 1 \end{cases}$$

**Processo de ramificação. Probabilidade de extinção.**

Seja $\pi_0$ a probabilidade de extinção da população

$$\pi_0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 1).$$

Notamos que $\pi_0 = 1$ se $\mu < 1$ e

$$\mu^n = \mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X_n = k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$$
$$= \mathbb{P}(X_n \geq 1) \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Pode ser provado que quando $\mu = 1$, também temos $\pi_0 = 1$. E quando $\mu > 1$, $\pi_0$ é solução da seguinte equação:

$$\pi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_0^k p_k.$$

**References:**

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 9th edition, Academic Press, 2007.