Construção de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

- Tendo construído os naturais, o próximo passo é construir $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$
- Ideia: Fazer com que uma operação aritmética, que seria definida apenas parcialmente em $\mathbb{N}$ (ou em $\mathbb{Z}$), seja definida no conjunto todo

. Os inteiros:

- Para definir a subtração precisamos:

Exercício: Mostre que se $m,n \in \mathbb{N}$, então $m \leq n \iff \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$.

Solução:

($\Leftarrow$) Suponha que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$. Se $k = 0$, então $m = n$.
Se $k \geq 1$, então $m < m+1 \leq m+k = n$.

($\Rightarrow$) Vamos mostrar por indução em n tomando $P(x)$ como sendo
"$\forall m \in \mathbb{N}\ (m \leq x \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $x = m + k$".

- $P(0)$ vale: $P(0)$ é $\forall m (m \leq 0 \Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $0 = m + k$
Nesse caso m só pode ser 0, então basta tomar $k = 0$.

- $P(n) \to P(n+1)$: Suponha $P(n)$, ou seja, que $\forall m\ (m \leq n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tq $n = m + k$
Temos que mostrar $P(n+1)$, ou seja, que $\forall m\ (m \leq n+1 \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}$ tq, $n+1 = m + k'$.

Para isso fixe m e suponha $m \leq n+1$. Logo temos $m \leq n$ ou $m = n+1$.
Se $m \leq n$, por hipótese de indução temos que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$. Mas daí $n+1 = m + (k+1)$, então é só pegar $k' = k+1$.
Se $m = n+1$, é só pegar $k' = 0$.

$\therefore$ usando P.I.F temos que vale $\forall n P(n)$, que é o que queríamos. //

· Isso justifica a seguinte definição:

<u>Def</u>: Se $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, e $k \in \mathbb{N}$ são tais que $n = m + k$, então k é chamado de <u>diferença</u> entre m e n e denotado por $n - m$. Fica assim definida a operação de <u>subtração</u>

· Se $n < m$, $\nexists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$, então $n - m$ não está definida.
Para definir $n - m$ neste caso, precisa-se "criar um objeto novo". Represente-o, por enquanto, por (n, m)

<u>Problema</u>: Intuitivamente: $3 - 4 = -1 \rightsquigarrow (3,4)$ $5 - 6 = -1 \rightsquigarrow (5,6)$ > representa o mesmo número.

Solução: identificar $(3,4)$ e $(5,6)$, fazer serem "iguais", ou melhor, equivalentes $\rightsquigarrow$ usa relação de equivalência

<u>Mas</u>: não podemos usar o "−" para definir a rel. de eq.

· De modo geral:
(n_1, m_1) e (n_2, m_2) representaria o mesmo número

$\iff n_1 - m_1 = n_2 - m_2$ $\rightsquigarrow$ ainda ñ posso falar sempre de subtração.

$\iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ $\rightsquigarrow$ só envolve soma, já definido. $\longrightarrow$ rel. de eq. (exercício lista 3)

Isso motiva a seguinte definição:

Def: Seja $\mathbb{Z}' = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Defina a relação em $\mathbb{Z}'$ por

$$(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = b+c$$

Exercício (Lista 3): Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}'$.

Def: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}'/_{\sim}$ é chamado de conjunto dos <u>inteiros</u> e seus elementos são chamados de <u>números inteiros</u>

- Mas como temos "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$"? Como são as classes de eq.?
  - Note que para inteiro $[(a,b)]$ temos duas possibilidades: $a \geq b$ ou $a < b$.
    - Se $a \geq b$, $(a,b) \sim (a-b, 0)$ (nesse caso $a-b$ já estava definido)
    - Se $a < b$, $(a,b) \sim (0, b-a)$ (nesse caso $b-a$ já estava definido).

Logo para inteiro $[(a,b)]$, para algum $n \in \mathbb{N}$,

$$(0,n) \in [(a,b)] \quad \text{ou} \quad (n,0) \in [(a,b)]$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$[(a,b)] = [(0,n)] \qquad [(a,b)] = [(n,0)].$$

$$\therefore \mathbb{Z} = \underbrace{\{\overset{-n}{\overset{\shortparallel}{[(0,n)]}} : n \in \mathbb{N}^*\}}_{\text{negativos}} \cup \underbrace{\{[(n,0)] : n \in \mathbb{N}\}}_{\cong \mathbb{N}}$$

$[(0,n)]$ → denotamos por $-n$

$\cong \mathbb{N}$ ↳ tem isomorfismo ~~de ordem~~ que preserva a ordem e que preserva as operações.

• Obs: Podemos definir a relação de ordem (usual) em $\mathbb{Z}$ e as operações + e ·.

. Ordem: $[(a,b)] < [(c,d)] \iff a+d < b+c$ (exercício Lista 4)

"a−b" "c−d"

tem que mostrar que está bem definida, ie, não depende da escolha dos representantes

. Operações: $[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$

$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)]$

("a−b") · (c−d)

(Tanto no caso da ordem como no caso das operações, precisa mostrar que a definição dada é a "mesma" que a dada anteriormente quando "restrita a $\mathbb{N}$")

(através da identificação feita, ou seja, ela é um isomorfismo)

Racionais:

. A ideia é análoga, mas agora olhamos a divisão no lugar da subtração.

Def: Se $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, dizemos que a é <u>divisível</u> por b se $\exists$ um único $x \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b.x$.

Problema: Estender a divisão $\forall a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

- Seja $Q' = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : b \neq 0\}$

  = conjunto de frações de $\mathbb{Z}$.

  <u>Notação</u>: $\frac{a}{b}$

- Note que temos o mesmo tipo de problema que tínhamos antes: Por exemplo,

  $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representará o mesmo número (pensando no que queremos)

  Novamente, usamos relação de equivalência para resolver.

<u>Def</u>: Seja $\sim$ a relação em Q' definida por

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff a.d = c.b.$$

<u>Exercício</u>: Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

<u>Def</u>: $\mathbb{Q} = Q'/_{\sim}$ é chamado de <u>conjunto dos números racionais</u>

Os elementos de $\mathbb{Q}$ são chamados de <u>números racionais</u>

- Assim $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q = \left[\frac{a}{b}\right]$ = nº racional

- <u>Obs</u>: $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ é uma função injetora (que será um isomorfismo).
  $i(a) = \left[\frac{a}{1}\right]$

  É através de i que identificamos os elementos de a de $\mathbb{Z}$ com $i(a)$ em $\mathbb{Q}$ e escreveremos "$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$"
  (mas isso é um abuso de linguagem, é para facilitar)

• Assim, como em $\mathbb{Z}$, podemos agora definir as operações $+$ e $\cdot$ em $\mathbb{Q}$ e também a ordem $<$.
Vou apenas dar as definições (mas como antes tem que checar várias coisas, as mesmas que em $\mathbb{Z}$).

<u>Def</u>: $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{ad+bc}{bd}\right]$ e $\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a \cdot c}{bd}\right]$.

• Para definir a ordem, precisamos fazer uma observação:

<u>Obs</u>: $\forall \left[\frac{a}{b}\right] \in \mathbb{Q} \quad \exists \ \frac{c}{d} \in \left[\frac{a}{b}\right]$ tal que $d > 0$

(por exemplo, só pegar $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ ou $\frac{c}{d} = \frac{-a}{-b}$)

<u>Def</u>: Se $b > 0$ e $d > 0$, definimos

$$\left[\frac{a}{b}\right] < \left[\frac{c}{d}\right] \iff a \cdot d < b \cdot c.$$

• Note que pela observação, $<$ está definida $\forall \left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{c}{d}\right] \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\mathrm{Dom}(<) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

• <u>Prop</u>: $<$ é uma ordem total em $\mathbb{Q}$

<u>Dem</u>, Exercício da lista 4.