Aula 13 – Equações diferenciais e dinâmica populacional.

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Definição informal:

- Uma **Equação Diferencial Ordinária** é uma equação em que a variável é uma **função** de domínio e imagem contidos em $\mathbb{R}$ e que possui o operador de derivação em sua expressão.
- A **ordem** de uma equação diferencial é o maior grau de derivação, isto é, o máximo de vezes que a função variável aparece sendo derivada consecutivamente.
- Exemplo de equação diferencial de ordem 2:
  $f''(x) + 2f'(x) = f(x)$.
- Podemos escrever, de forma mais sucinta: $f'' + 2f' = f$.
- O cálculo da primitiva pode ser interpretrado como a resolução de uma equação diferencial da forma $f'(x) = g(x)$, sendo $f(x)$ a variável da equação e $g(x)$ uma função dada.

Aplicações de equações diferenciais

- As equações diferenciais formam a área da matemática com mais aplicações práticas.
- Essas aplicações envolvem diversas áreas do conhecimento humano, tais como física, química, engenharia, medicina, biologia e ciências sociais.
- Como acontece com a integração, em diversas aplicações práticas resolvemos uma equação diferencial numericamente, sem exibir explicitamente a função que resolve a equação.
- Nesta aula focaremos em uma aplicação específica: modelos de crescimento populacional (de pessoas, animais, bactérias, vírus, etc.). Veremos os modelos de Malthus e Verhulst.

Modelos de dinâmica populacional

Modelo de Malthus (equação de crescimento natural)

- "A taxa de crescimento de uma população é proporcional ao tamanho da população".
- Isso é representado pela equação diferencial $f'(x) = kf(x)$, para $k \in \mathbb{R}$.
- As soluções dessa equação são as funções da forma $f(x) = ce^{kx}$, para $c \in \mathbb{R}$.
- Esse modelo retrata bem o crescimento populacional inicial, mas tem problema quando o tamanho da população começa a atingir a capacidade máxima que o ambiente permite (por exemplo, falta de alimentos).
- O próximo modelo que veremos é mais realista, porque impõe uma limitação ao crescimento.

Modelo de Verhulst (equação logística)

- $f' = kf\left(1 - \dfrac{f}{M}\right)$, com $k, M \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.
- Nessa equação $f(x)$ pode ser interpretada, dentre outras aplicações, como o número da população em função do tempo.
- A constante k representa o “quão rapidamente” a população cresce.
- A constante M representa a **capacidade de suporte**, que é o tamanho máximo da população suportada pelo ambiente.
- Note que, quando $f(x)$ é muito menor que M, a equação é próxima da equação de Malthus.
- Quando $f(x)$ se aproxima de M, o crescimento se aproxima de 0.
- Se $f(x)$ ultrapassar M, o crescimento passa a ser negativo (decrescimento populacional).

Solução para a equação de Verhulst

- As soluções para a equação de Verhulst, com $k, M > 0$, são da seguinte forma:
- $f(x) = \dfrac{M}{1 + Ae^{-kx}}$.
- Note que $f'(x) = \dfrac{MAke^{-kx}}{(1 + Ae^{-kx})^2} = kf(x)\left(1 - \dfrac{f(x)}{M}\right)$.
- Se $A = 0$, a população se estabilizou na quantidade de M indivíduos.
- Se $A > 0$, a população irá crescer, tendendo a M.
- Se $A < 0$, a população irá decrescer, tendendo a M.

Condição inicial

- Vemos que as equações diferenciais, como a de Malthus e Verhulst, possuem infinitas soluções.
- Para que uma equação como essa tenha **uma única** solução precisamos estabelecer a **condição inicial**.
- A saber, acrescentamos uma equação da forma $f(x_0) = y_0$.
- Em equações de modelos de crescimento populacional, isso significa informar o tamanho da população em algum instante de tempo (geralmente $x_0 = 0$, que é quando iniciamos a observação).
- Há os **teoremas de existência e unicidade** que garantem que, para certos tipos de equações diferenciais ordinárias, existe uma única função que resolve a equação com a condição inicial $f(x_0) = y_0$.

- **Exemplo**. Veja como fica a equação de Malthus com uma condição inicial no instante 0.
- $\begin{cases} f'(x) = kf(x) \\ f(0) = c \end{cases}$
- A solução dessa equação é $f(x) = ce^{kx}$.
- Já a equação logística em sua forma geral, com condição inicial, sendo $k, M, y_0 > 0$, fica:
- $\begin{cases} f' = kf\left(1 - \frac{f}{M}\right) \\ f(0) = y_0 \end{cases}$
- Sendo a solução geral $f(x) = \frac{M}{1+Ae^{-kx}}$, fazendo $f(0) = y_0$ concluímos que:
- $A = \dfrac{M}{y_0} - 1.$

- Note que não podemos ter $y_0 = 0$.
- Para fins de resolução da equação não há problema algum se tivermos $y_0 < 0$, mas não faz sentido se aplicarmos no estudo de dinâmica populacional.
- Se $y_0 > 0$, temos $A > -1$.
- Se $y_0 < M$, temos $A > 0$ e a população está crescendo.
- Se $y_0 = M$, temos $A = 0$ e a população é constante.
- Se $y_0 > M$, temos $A < 0$ e a população está decrescendo.

Fim