**PRIMEIRA PROVA - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)**

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração, a não ser, claro, quando estamos pedindo para que sejam demonstrados.

**Boa Prova!**

**Exercício 1.** Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $u \in C^\infty(U)$.

(1,0 ponto) a) Para cada $x \in U$ e $r > 0$ tal que $\overline{B(x,r)} \subset U$, calcule

$$U(x,r) = \frac{d^2}{dr^2} ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y).$$

(1,0 ponto) b) Mostre $\lim_{r \to 0^+} U(x,r) = \frac{1}{2}\Delta u(x)$.

(1,0 ponto) c) Use os resultados acima para demonstrar novamente uma proposição vista em sala de aula: Se $u \in C^\infty(U)$ é uma função para a qual vale a fórmula do valor médio, ou seja, $u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)$ para todo $x \in U$ e $r > 0$ tal que $\overline{B(x,r)} \subset U$, então a função $u$ é harmônica.

**Exercício 2.** (1,5 ponto) Seja $n \geq 2$. Ache todas as funções $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ que sejam harmônicas e limitadas. (Dica: singularidade)

**Exercício 3.** (1,25 ponto) a) Seja $f \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Definimos $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Dado $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, definimos

$$u_\lambda(\varphi) = \frac{1}{\lambda^n} u(\varphi_{\frac{1}{\lambda}}),\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Dado $f \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, mostre que se $u = T_f$, então $u_\lambda = T_{f_\lambda}$ e que $(\delta_0)_\lambda = \frac{1}{\lambda^n}\delta_0$, em que $\delta_0$ é o delta de Dirac. (Lembramos que $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(x)\varphi(x)dx$, para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$).

(1,25 ponto) b) Seja $K$ a solução fundamental da equação do calor em $\mathbb{R}^n$. Sabemos que $\frac{\partial K}{\partial t} - \Delta K = \delta_0$, ou seja,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) - \Delta\varphi(x,t) \right) dxdt = \varphi(0,0), \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{0.1}$$

Mostre que

$$K_k(x,t) = \frac{1}{k^{\frac{n}{2}}} K_k\left(\frac{x}{\sqrt{k}}, t\right) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi k t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases},$$

é a solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta$, $k > 0$ é uma constante. (Dica: O que ocorre se colocarmos $\varphi(\sqrt{k}x, t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ na integral 0.1?). OBS: Não é necessário usar o item a.

(0,5 ponto) c) Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ache uma fórmula dada por uma integral em termos de $f$ e $K_k$ para uma solução de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\Delta u(x,t) = f(x,t).$$

**Exercício 4.** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^1$. Considere o seguinte problema

$$\begin{array}{rll} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \right), & (x,t) \in U \times ]0,\infty[ \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\, \nu_i(x) \right) & = 0, & (x,t) \in \partial U \times ]0,\infty[ \\ u(x,0) & = u_0(x), & x \in U \end{array}, \tag{0.2}$$

em que o vetor $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), ..., \nu_n(x))$ é a normal unitária que aponta para fora de $U$, $u_0 \in C^2(\overline{U})$ é tal que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x)\, \nu_i(x) = 0$ para $x \in \partial U$ e as funções $a_{ij} : U \to \mathbb{R}$ são tais que

i) $a_{ij} \in C^1(\overline{U})$.

ii) $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

iii) Existe $a_0 > 0$ tal que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ . (Em particular, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \geq 0$).

(1,25 ponto) a) Mostre que se $u \in C^2(\overline{U} \times [0,\infty[$ é solução da Equação (0.2), então

$$E(t) = \int_U u(x,t)^2 dx,\ t \in [0, \infty[$$

é uma função não crescente. Dica: Se $f$ e $g$ são funções de classe $C^1(\overline{U})$, então

$$\int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx = -\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx + \int_{\partial U} f(x) g(x) \nu_i dS(x).$$

(1,25 ponto) b) Mostre que existe no máximo uma solução em $C^2(\overline{U} \times [0, \infty[)$ do Problema (0.2).

## Formulário. (Nem tudo é necessário)

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y-x| < r\}$, $\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y-x| \leq r\}$, $\partial B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y-x| = r\}$ e $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B(0,1)$.

$$|B(x,r)| := \int_{B(x,r)} dy \ \text{ é o volume da bola } B(x,r)$$

$$|\partial B(x,r)| := \int_{\partial B(x,r)} dS(y) \ \text{ é a área da bola } \partial B(x,r)$$

$$\left|\mathbb{S}^{n-1}\right| := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(y) \ \text{ é a área da bola unitária}$$

Por exemplo, se $n = 2$, então $|B(x,r)| = \pi r^2$ e $|\partial B(x,r)| = 2\pi r$. As médias são definidas como

$$⨍_{B(x,r)} f(y)dy = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy \text{ e } ⨍_{\partial B(x,r)} f(y)dS(y) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} f(y)dS(y).$$

**Lema 5.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $x \in U$, $r > 0$ e $\overline{B(x,r)} \subset U$. Logo*

*1)* $\int_{\partial B(x,r)} f(y)dS(y) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x+rz)r^{n-1}dS(z)$.
*2)* $|\partial B(x,r)| = r^{n-1}\left|\mathbb{S}^{n-1}\right|$.
*3)* $\int_{B(x,r)} f(y)dy = \int_0^r \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x+sz)dS(z)\right)s^{n-1}ds = \int_0^r \int_{\partial B(x,r)} f(y)dS(y)ds$.
*4)* $|B(x,r)| = \frac{r^n\left|\mathbb{S}^{n-1}\right|}{n}$.

**Teorema 6.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : U \to \mathbb{R}$ uma função. As seguintes propriedades abaixo são equivalentes:*

*1) A função $u$ é harmônica, ou seja, $u \in C^2(U)$ e $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in U$.*
*2) A função $u$ é contínua e $u(x) = ⨍_{B(x,r)} udy$, para todo $\overline{B(x,r)} \subset U$.*
*3) A função $u$ é contínua e $u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} udS$, para todo $\overline{B(x,r)} \subset U$.*
*4) A função $u \in C^\infty(U)$ e $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in U$.*

**Teorema 7.** *(Remoção de singularidades) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $x_0 \in U$. Considere uma função $u : U \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ harmônica tal que*

$$\begin{array}{rcl} \lim_{x\to x_0} \frac{|u(x)|}{\ln(|x-x_0|)} &=& 0, \quad n=2 \\ \lim_{x\to x_0} |x-x_0|^{n-2}|u(x)| &=& 0, \quad n>2 \end{array} \tag{0.3}$$

*Então existe o limite $\lim_{x\to x_0} u(x)$, o limite é finito e a função $v : U \to \mathbb{R}$ dada abaixo é harmônica*

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \neq x_0 \\ \lim_{x\to x_0} u(x), & x = x_0 \end{cases}.$$

**Teorema 8.** *(Princípio de Reflexão) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que, se $(x', x_n) \in U$, então $(x', -x_n) \in U$. Consideremos os seguintes conjuntos:*

$$U_0 = \left\{(x', x_n) \in U;\ x_n = 0\right\}$$
$$U_+ = \left\{(x', x_n) \in U;\ x_n > 0\right\}$$
$$U_- = \left\{(x', x_n) \in U;\ x_n < 0\right\}$$

*Seja $u : U_0 \cup U_+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $u|_{U_+} : U_+ \to \mathbb{R}$ é de classe $C^2$ e $\Delta u(x) = 0$, para todo $x \in U_+$. Se $u(x) = 0$ para todo $x \in U_0$, então a função $v : U \to \mathbb{R}$ definida abaixo é harmônica:*

$$v(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & x \in U_+ \\ 0, & x \in U_0 \\ -u(x', -x_n), & x \in U_- \end{cases}.$$

**Teorema 9.** *(Liouville) Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função harmônica e limitada. Logo $u$ é a função constante.*

**Definição 10.** Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(U)$ é um funcional linear $u : C_c^\infty(U) \to \mathbb{R}$ contínuo.

**Exemplo 11.** A distribuição Delta de Dirac $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\delta_0(\phi) = \phi(0)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

**Definição 12.** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $u \in \mathcal{D}'(U)$. Definimos a distribuição $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(U)$, chamada de derivada da distribuição $u$ de ordem $\alpha$, da seguinte forma: $\partial^\alpha u(\phi) = (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha \phi)$, $\phi \in C_c^\infty(U)$, em que usamos a notação $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$.

**Definição 13.** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $u \in \mathcal{D}'(U)$ e $g \in C^\infty(U)$. Então definimos a distribuição $gu \in \mathcal{D}'(U)$ da seguinte maneira: $gu(\phi) = u(g\phi)$, $\phi \in C_c^\infty(U)$.

**Definição 14.** Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é chamada de **solução fundamental** do operador $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, se satisfizer $\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = \delta_0$.

Em particular, se $u = T_g$, em que $g$ é uma função contínua ou localmente integrável (lembramos que $T_g(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)dx$), então $u$ será uma solução fundamental se, e somente se,

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}(x)dx = \phi(0), \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

**Exemplo 15.** A solução fundamental do calor $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ é a distribuição associada a função dada por

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

**Definição 16.** (Teorema da Divergência) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^1$ e $F : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $C^1$. Logo

$$\int_{\partial U} F(x) .\nu(x) dS(x) = \int_U \nabla .F(x) dx,$$

em que $\nu : \partial U \to \mathbb{R}^n$ é o vetor normal unitário que aponta para fora de $U$.

**Proposição 17.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^1$ e $f$ e $g$ duas funções em $C^1(\overline{U})$. Logo*

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dx = -\int_U f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial U} f(x)g(x)\nu_i(x)dS(x), \tag{0.4}$$

*em que $i \in \{1, ..., n\}$ e $\nu(x) = (\nu_1(x), ..., \nu_n(x))$ é a normal a $\partial U$ no ponto $x$ e que aponta para fora de $U$.*