

**PRIMEIRA PROVA - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)**

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração, a não ser, claro, quando estamos pedindo para que sejam demonstrados.

**Boa Prova!**

**Exercício 1.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto limitado. Suponha que

$$(0.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = g(x, y),$$

em que  $a : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas.

(1,25 ponto) a) Mostre que se  $g(x, y) > 0$  para todo  $(x, y) \in U$  e se  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  é uma solução de (0.1), então

$$\max_U u = \max_{\partial U} u.$$

(Dica: Se  $(x_0, y_0) \in U$  é o máximo de  $u$ , então 0 é o máximo das funções  $t \mapsto u(x_0 + t, y_0)$  e  $s \mapsto u(x_0, y_0 + s)$ . O que se pode dizer sobre a primeira e a segunda derivadas dessas funções para  $t$  e  $s$  iguais a 0? Calcule essas derivadas).

(0,5 ponto) b) Seja  $w : U \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $w(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) + a(x, y) \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) > 0.$$

(1,25 ponto) c) Seja  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  uma solução de (0.1) com  $g \equiv 0$ . Usando as funções  $v_\epsilon := u + \epsilon w$ , conclua primeiramente que  $\max_U u = \max_{\partial U} u$  e depois que  $\min_U u = \min_{\partial U} u$ . Mostre que existe no máximo uma solução  $\bar{u} \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  do problema abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}(x, y) + a(x, y) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x, y) &= h_1(x, y), & (x, y) \in U \\ \bar{u}(x, y) &= h_2(x, y), & (x, y) \in \partial U \end{aligned}$$

em que  $h_1 : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_2 : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas.

**Exercício 2.** (1,5 ponto) Seja  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica. Mostre que se  $u(0) = 0$ , então para todo  $R > 0$ , existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|x| = R$  e  $u(x) = 0$ . (Dica: valor médio)

**Exercício 3.** (1,25 ponto) a) Seja  $f \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Definimos  $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ . Dado  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , definimos

$$u_\lambda(\varphi) = \frac{1}{\lambda^n} u(\varphi_{\frac{1}{\lambda}}), \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Dado  $f \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , mostre que se  $u = T_f$ , então  $u_\lambda = T_{f_\lambda}$  e que  $(\delta_0)_\lambda = \frac{1}{\lambda^n} \delta_0$ , em que  $\delta_0$  é o delta de Dirac. (Lembramos que  $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(x) \varphi(x) dx$ , para  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ).

(1,25 ponto) b) Seja  $K$  a solução fundamental da equação do calor em  $\mathbb{R}^n$ . Sabemos que  $\frac{\partial K}{\partial t} - \Delta K = \delta_0$ , ou seja,

$$(0.2) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) - \Delta \varphi(x, t) \right) dx dt = \varphi(0, 0), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Mostre que

$$K_k(x, t) = \frac{1}{k^{\frac{n}{2}}} K_k \left( \frac{x}{\sqrt{k}}, t \right) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases},$$

é a solução fundamental de  $\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta$ ,  $k > 0$  é uma constante. (Dica: O que ocorre se colocarmos  $\varphi(\sqrt{k}x, t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  na integral 0.2?). OBS: Não é necessário usar o item a).

(0,5 ponto) c) Seja  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Ache uma fórmula dada por uma integral em termos de  $f$  e  $K_k$  para uma solução de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k\Delta u(x, t) = f(x, t).$$

**Exercício 4.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Considere o seguinte problema

$$(0.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t) - u(x, t), & (x, t) \in U \times ]0, \infty[ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, & (x, t) \in \partial U \times ]0, \infty[ \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in U \end{aligned}$$

em que o vetor  $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x))$  é a normal unitária que aponta para fora de  $U$ ,  $u_0 \in C^2(\bar{U})$  é tal que  $\frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) = 0$  para  $x \in \partial U$ .

(1,25 ponto) a) Mostre que se  $u \in C^2(\bar{U} \times [0, \infty[)$  é solução da Equação (0.3), então

$$E(t) = \int_U u(x, t)^2 dx, \quad t \in [0, \infty[$$

é uma função não crescente. Dica: Se  $f$  e  $g$  são funções de classe  $C^1(\bar{U})$ , então

$$\int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx = - \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx + \int_{\partial U} f(x) g(x) \nu_i dS(x).$$

(1,25 ponto) b) Mostre que existe no máximo uma solução em  $C^2(\bar{U} \times [0, \infty[)$  do Problema (0.3).

FORMULÁRIO. (NEM TUDO É NECESSÁRIO)

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| < r\}$ ,  $\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| \leq r\}$ ,  $\partial B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| = r\}$  e  $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B(0, 1)$ .

$$|B(x, r)| := \int_{B(x, r)} dy \text{ é o volume da bola } B(x, r)$$

$$|\partial B(x, r)| := \int_{\partial B(x, r)} dS(y) \text{ é a área da bola } \partial B(x, r)$$

$$|\mathbb{S}^{n-1}| := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(y) \text{ é a área da bola unitária}$$

Por exemplo, se  $n = 2$ , então  $|B(x, r)| = \pi r^2$  e  $|\partial B(x, r)| = 2\pi r$ . As médias são definidas como

$$\int_{B(x, r)} f(y) dy = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy \text{ e } \int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y).$$

**Lema 5.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Seja  $x \in U$ ,  $r > 0$  e  $\overline{B(x, r)} \subset U$ . Logo

- 1)  $\int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + rz) r^{n-1} dS(z)$ .
- 2)  $|\partial B(x, r)| = r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|$ .
- 3)  $\int_{B(x, r)} f(y) dy = \int_0^r \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + sz) dS(z) \right) s^{n-1} ds = \int_0^r \int_{\partial B(x, s)} f(y) dS(y) ds$ .
- 4)  $|B(x, r)| = \frac{r^n |\mathbb{S}^{n-1}|}{n}$ .

**Teorema 6.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. As seguintes propriedades abaixo são equivalentes:

- 1) A função  $u$  é harmônica, ou seja,  $u \in C^2(U)$  e  $\Delta u(x) = 0$  para todo  $x \in U$ .
- 2) A função  $u$  é contínua e  $u(x) = \int_{B(x, r)} u dy$ , para todo  $\overline{B(x, r)} \subset U$ .
- 3) A função  $u$  é contínua e  $u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u dS$ , para todo  $\overline{B(x, r)} \subset U$ .
- 4) A função  $u \in C^\infty(U)$  e  $\Delta u(x) = 0$  para todo  $x \in U$ .

**Teorema 7.** (Remoção de singularidades) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $x_0 \in U$ . Considere uma função  $u : U \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica tal que

$$(0.4) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|u(x)|}{\ln(|x - x_0|)} &= 0, & n = 2 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{n-2} |u(x)| &= 0, & n > 2 \end{aligned}$$

Então existe o limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ , o limite é finito e a função  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada abaixo é harmônica

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x), & x = x_0 \end{cases}.$$

**Teorema 8.** (Princípio de Reflexão) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto tal que, se  $(x', x_n) \in U$ , então  $(x', -x_n) \in U$ . Consideremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} U_0 &= \{(x', x_n) \in U; x_n = 0\} \\ U_+ &= \{(x', x_n) \in U; x_n > 0\} \\ U_- &= \{(x', x_n) \in U; x_n < 0\} \end{aligned}$$

Seja  $u : U_0 \cup U_+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $u|_{U_+} : U_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  e  $\Delta u(x) = 0$ , para todo  $x \in U_+$ . Se  $u(x) = 0$  para todo  $x \in U_0$ , então a função  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida abaixo é harmônica:

$$v(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & x \in U_+ \\ 0, & x \in U_0 \\ -u(x', -x_n), & x \in U_- \end{cases}.$$

**Teorema 9.** (Liouville) Seja  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica e limitada. Logo  $u$  é a função constante.

**Definição 10.** Uma distribuição  $u \in \mathcal{D}'(U)$  é um funcional linear  $u : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  contínuo.

**Exemplo 11.** A distribuição Delta de Dirac  $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  é dada por  $\delta_0(\phi) = \phi(0)$ ,  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Definição 12.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  e  $u \in \mathcal{D}'(U)$ . Definimos a distribuição  $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(U)$ , chamada de derivada da distribuição  $u$  de ordem  $\alpha$ , da seguinte forma:  $\partial^\alpha u(\phi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \phi)$ ,  $\phi \in C_c^\infty(U)$ , em que usamos a notação  $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ .

**Definição 13.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $u \in \mathcal{D}'(U)$  e  $g \in C^\infty(U)$ . Então definimos a distribuição  $gu \in \mathcal{D}'(U)$  da seguinte maneira:  $gu(\phi) = u(g\phi)$ ,  $\phi \in C_c^\infty(U)$ .

**Definição 14.** Uma distribuição  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  é chamada de **solução fundamental** do operador  $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ ,  $a_\alpha \in \mathbb{R}$ , se satisfizer  $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = \delta_0$ .

Em particular, se  $u = T_g$ , em que  $g$  é uma função contínua ou localmente integrável (lembramos que  $T_g(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)dx$ ), então  $u$  será uma solução fundamental se, e somente se,

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}(x) dx = \phi(0), \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

**Exemplo 15.** A solução fundamental do calor  $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$  é a distribuição associada a função dada por

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

**Definição 16.** (Teorema da Divergência) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $F : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ . Logo

$$\int_{\partial U} F(x) \cdot \nu(x) dS(x) = \int_U \nabla \cdot F(x) dx,$$

em que  $\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o vetor normal unitário que aponta para fora de  $U$ .

**Proposição 17.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $f$  e  $g$  duas funções em  $C^1(\bar{U})$ . Logo

$$(0.5) \quad \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx = - \int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial U} f(x) g(x) \nu_i(x) dS(x),$$

em que  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$  é a normal a  $\partial U$  no ponto  $x$  e que aponta para fora de  $U$ .