MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

Lista de Exercícios 4: Séries

1. Verifique que cada série a seguir converge e obtenha a soma.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7}{(-4)^{n+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{10^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

2. Seja uma sequência qualquer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ converge. Qual a relação dessa série com a representação decimal de um número real?

3. Vimos em aula que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada. Portanto a sequência converge e seu limite é denotado por e, número de Euler.

   A sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ também é crescente e limitada (verifique!), portanto convergente.

   (a) Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Conclua que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$

   (b) Obtenha as somas (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-n-1}{n!}$

4. Verifique se cada série abaixo converge ou diverge. Justifique sua resposta.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[3]{n^2+4}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^k}$, $k\in\mathbb{N}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\,3^n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$, a >0 (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,3^n}{n^n}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{1/n}}{n^n}$ (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n}{n!\,n}$

   (n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^n$ (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ (p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ (q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

5. Seja p um número real positivo. Encontre todos os valores de p para os quais a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^p}$ é convergente.

6. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

   (a) Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge então $\sum(a_n+b_n)$ diverge.

   (b) Se $k\in\mathbb{R}$, $k\neq 0$ e $\sum a_n$ diverge então $\sum(ka_n)$ diverge.

   (c) Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem então $\sum(a_n+b_n)$ diverge.

   (d) Se $\sum a_n$ diverge então $\sum |a_n|$ diverge.

   (e) Se $\sum a_n$ diverge e se $a_n \geq b_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ então $\sum b_n$ diverge.

   (f) Se $\sum a_n$ converge e $a_n \geq b_n$ então $\sum b_n$ converge.

7. Estude a convergência absoluta ou condicional das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\cos n}{(n!)^3}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+1}{n^3+3}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n-1)^n}{(2n^2+1)^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^6}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{n^2+3}$

8. (a) Mostre que se $\sum a_n$ é uma série de números positivos convergente e se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada de números positivos então $\sum a_n b_n$ é convergente.
   (b) Mostre com um exemplo que o resultado de (a) é falso sem a hipótese de limitação de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Se $\sum a_n$ é uma série convergente, sendo a_n não necessáriamente positivos, e se $(b_n)_n$ é sequência limitada de números positivos então $\sum a_n b_n$ é convergente? Justifique.
   (d) Usando (a) prove que se $a_n \geq 0$ para todo n então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)a_n$ também é convergente.
   (e) Usando (a) mostre que se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries de números positivos, ambas convergentes, então $\sum a_n b_n$ éonvergente. Note que, em particular, $\sum a_n^2$ é convergente.
   (f) Encontre exemplos de séries que satisfazem as hipóteses de (e) e tais que que $\sum a_n b_n \neq \sum a_n \cdot \sum b_n$.

9. Determine todos os valores de x real para os quais as séries abaixo convergem. Justifique as respostas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$