SISTEMAS AUTÔNOMOS

Consideremos o sistema *não linear*

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots \\ \dot{x_1} = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

sendo $f_1, f_2, \cdots, f_n$ funções de clase C^1 em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$. Um sistema do tipo (1) (em que as funções f_i não dependem de t), é denominado *sistema autônomo*. (observemos que D é subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e não de $\mathbb{R}^{n+1}$, o que será importante no que segue.

Se

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(y) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

o sistema 1 pode ser escrito na forma:

$$(2) \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Sejam $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ duas soluções de (2) satisfazendo a mesma condição inicial em instantes diferentes do tempo, ou seja: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_1) = \eta$.

Definindo $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t + (t_1 - t_0))$,, teremos

Date: November 13, 2020.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \dot{\mathbf{y}}(t + (t_2 - t_1)) \\ &= f(\mathbf{y}(t + (t_2 - t_1))) \\ &= f(\mathbf{z}(t))\end{aligned}$$

e $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_0)$. Do Teorema de Existência e Unicidade, segue que

$\mathbf{y}(t + (t_1 - t_0)) = \mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)$, ou seja, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ diferem apenas por uma translação no tempo.

Portanto, não temos mais informações olhando as soluções do sistema (1) em $D \times \mathbb{R}$ basta olhar no domínio D e podemos supor que a condição inicial está dada no instante initial $t = 0$. As curvas parametrizadas em D definidas pelas soluções do $\mathbf{x}(t)$ sistema com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in D$ são denominadas *órbitas* ou *trajetórias* do sistema passando por $\mathbf{x}_0$. A cada ponto $\mathbf{x}$ em D, corresponde um único vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ tangente à órbita passando por $\mathbf{x}$ em um instante qualquer t. É então conveniente representar as trajetórias como curvas no domínio D com sentido de percurso determinado pelo campo vetorial $\mathbf{F}$.

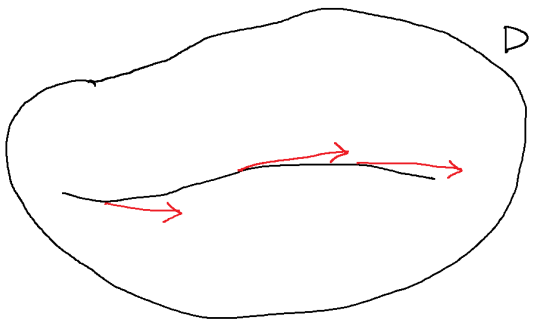

FIGURE 1. Uma trajetória do sistema

Suponhamos que $D = \mathbb{R}^n$ e que as soluções de (2) estejam definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se denotarmos por $\Phi(t, x_0)$ a órbita passando por x_0 (no instante $t = 0$, então um argumento semelhante ao de acima mostra que $\Phi(t+s, x_0) = \Phi(t, \Phi(s, x_0))$ para $t, s \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Denotando $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$, teremos uma *família a um parâmetro de transformações* $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, satisfazendo

- Φ_t é contínua.
- $\Phi_0 = \mathrm{Id}$.
- $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$.

Uma família a um parâmetro de transformações com essas propriedades é denominada um *fluxo ou sistema dinâmico*. O objetivo da teoria qualitativa dos sitemas dinâmicos é estudar o comportamento das *órbitas* $\Phi(t, x_0)$ quando x_0 varia no *espaço de fase.*

Para este objetivo é especialmente importante encontrar as soluções especiais de dois tipos:

- Pontos de equilíbrio,
- Órbitas periódicas.

1. Pontos de equilíbrio

Definição 1. *Uma solução constante de* (2) $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$ *é denominada uma soluçõ ou ponto de equilíbrio (ou ponto singular, ou ponto crítico) do sistema* (1)*.*

Se $\mathbf{x}_0$ é um ponto de equilíbrio do sistema (1) então:
$\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = 0 \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = 0$ e reciprocamente, ou seja

Proposição 2. *Um ponto* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *é um ponto de equilíbrio do sistema* (1) *se e somente se* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) = 0$*.*

Em vista desta proposição, para encontrar as soluções de equilíbrio do sistema (2), *basta resolver uma equação algébrica.*

Exemplo 3. *Consideremos a equação de* 2^a *ordem :* $\ddot{x} - 8x\dot{x} = 0$. *Fazendo* $y = \dot{x}$ *, obtemos o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 8xy, \end{cases} \tag{3}$$

Os pontos de equilíbrio são os pontos (x, y) *tais que* $y = 0$, *ou seja, os pontos do eixo* x. *Para as outras soluções, supondo* $\dot{x} \neq 0$ *(ou seja* $y \neq 0$*), teremos a equação:*

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 8x.$

Segue que $y(x) = 4x^2 + K$.

Para o estudo do sistema (2) é importante entender o comportamento das órbitas com condições iniciais próximas dos pontos de equilíbrio.

Definição 4. *Dizemos que um ponto de equilíbrio* $\boldsymbol{x}_0$ *é estável se, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$. *tal que, se* $d(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}_0) < \delta$ *então* $d(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}_0) < \epsilon$, *para todo* $t > 0$.

Definição 5. *Dizemos que um ponto de equilíbrio* $\boldsymbol{x}_0$ *é assintoticamente estável se* $\boldsymbol{x}_0$ *é estaável e, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $\eta > 0$. *tal que, se* $d(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}_0) < \eta$ *então* $d(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}_0) \to 0$, *quando* $t \to \infty$.

2. Órbitas periódicas

Definição 6. *Uma solução* $\boldsymbol{x}(t)$ *de* (2) *é dita* periódica de período T *se* $\boldsymbol{x}(t + T) = \boldsymbol{x}(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Observação 7. *Se* $\boldsymbol{x}(t_0 + T) = \boldsymbol{x}(t_0)$ *para algum* $t_0 \in \mathbb{R}$ *então* $\boldsymbol{x}(t)$ *é orbita periódica. De fato, usando a notação de sistemas*

dinâmicos, $\Phi(t, x_0) = \boldsymbol{x}(t)$ *teremos, para todo* $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t+T) &= \Phi(t+T, x_0) = \Phi(t - t_0 + t_0 + T, x_0)\\ &= \Phi(t - t_0, \Phi(t_0 + T, x_0)) = \Phi(t - t_0, \Phi(t_0, x_0))\\ &= \Phi(t - t_0 + t_0, x_0) = \Phi(t, x_0)\\ &= \boldsymbol{x}(t).\end{aligned}$$

Ao contrário do que ocorre no caso de pontos críticos, a pesquisa de órbitas periódicas não pode, em geral, ser reduzida a um problema "algébrico" e pode ser bastante difícil. No caso do plano, porém temos um resultado importante, o *Teorema de Poincaré Bendixon* que dá condições suficientes para a existência de órbitas periódicas, como veremos.