

Exercício da aula de hoje: 12/11/2020

1) Um recipiente lacrado contém um gás rarefeito de neônio, Ne, com uma quantidade de  $2,0 \times 10^{19}$  átomos/cm<sup>3</sup> e energia cinética média por átomo de  $5,2 \times 10^{-21}$  J. Sabendo que a massa do Ne é 20 u.m.a. e que cada átomo realiza em média  $10^8$  colisões/s, determine: (a) a pressão e temperatura do gás; (b) a velocidade média dos átomos; (c) o raio de Ne; (d) a energia cinética quadrática média de cada átomo deste gás.

Respostas: (a) 251 K e  $0,7 \times 10^5$  Pa = 0,7 atm; (b) 515 m/s; (c)  $0,23 \times 10^{-10}$  m = 0,23 Å; (d)  $3,78 \times 10^{-21}$  J.

2) Uma pessoa embriagada anda cambaleando com um movimento muito parecido com um movimento Browniano em 1D com a probabilidade de dar um passo para direita de 0,6. Considere que cada passo dessa pessoa tem cerca de 80 cm e dura cerca de 2 s, determine: (a) a probabilidade desta pessoa ter dado 5 passos para a direita de um total de 10 passos (discuta este resultado com o movimento Browniano com equiprobabilidade para direita e esquerda); (b) o coeficiente de difusão desse movimento; (c) quantos passos em média para a direita esta pessoa precisa dar para ter se deslocado em média 100 m e 1 km; (d) compare o tempo para esta pessoa ter deslocado em média 1 km com esse movimento e com um movimento retilíneo uniforme. Discuta este resultado.

Resposta: (a)  $P(5) = 0,200$  e  $P_{\text{equip}}(5) = 0,246$ ; (b)  $D = 0,15$  m<sup>2</sup>/s; (c) para o deslocamento médio de 100 m é necessário dar um total de 625 passos onde em média são 375 passos para a direita e para o deslocamento médio de 1000 m é necessário dar um total de 6250 passos onde em média são 3750 passos para a direita; (d) para o deslocamento médio de 1000 m é necessário um tempo total de 12500 s = 3h 28min e 20s, mas no M.R.U para deslocar 1000 m seria um tempo total de 2500 s = 41min e 40s.

Relações matemáticas importantes:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$

Dados:

1 u.m.a. =  $1,66 \times 10^{-27}$  kg; 1 ns =  $10^{-9}$  s; 1 Å =  $10^{-10}$  m; 1 atm  $\approx 10^5$  Pa;  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K.

$m(\text{He}) = 4$  u.m.a.,  $m(\text{C}) = 12$  u.m.a.,  $m(\text{O}) = 16$  u.m.a.,  $m(\text{Ne}) = 20$  u.m.a.,  $m(\text{O}_2) = 32$  u.m.a.,  $m(\text{N}_2) = 28$  u.m.a. e  $m(\text{Ar}) = 39,95$  u.m.a.

Formulário:

$$G_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx \Rightarrow G_{2i} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2i-1)}{2^{i+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2i+1}}} \text{ e } G_{2i+1} = \frac{i!}{2\alpha^{i+1}}; \quad x \ll 1 \rightarrow e^x \approx 1 + x; \quad P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n};$$

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma_n^2}}; \quad \langle n \rangle = Np; \quad \langle n^2 \rangle = Np(q + Np); \quad \sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2; \quad D = \frac{2l^2 pq}{\tau}; \quad D = \frac{kT}{6\pi a \eta}; \quad dx dy dz = 4\pi r^2 dr;$$

$$dx dy = 2\pi r dr; \quad f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}; \quad v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}; \quad \beta = (1/kT); \quad dp(\Gamma) = (1/Z) e^{-\beta E} d\Gamma; \quad Z = z^N;$$

$$z = \int \dots \int e^{-\beta E_i} d\Gamma_i; \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z); \quad F = -\left( \frac{1}{\beta} \right) \ln Z; \quad P = -\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}; \quad S = -\left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N}; \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \rho_N \pi a^2}; \quad P = \frac{\rho}{3} \langle v^2 \rangle;$$

Hoje: 12/11/20

Exercícios.

Relações matemáticas importantes:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$

Dados:

$1 \text{ u.m.a.} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ ;  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ;  $1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}$ ;  $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ .

$m(\text{He}) = 4 \text{ u.m.a.}$ ,  $m(\text{C}) = 12 \text{ u.m.a.}$ ,  $m(\text{O}) = 16 \text{ u.m.a.}$ ,  $m(\text{Ne}) = 20 \text{ u.m.a.}$ ,  $m(\text{O}_2) = 32 \text{ u.m.a.}$ ,  $m(\text{N}_2) = 28 \text{ u.m.a.}$  e  $m(\text{Ar}) = 39,95 \text{ u.m.a.}$

Formulário:

$$G_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx \Rightarrow G_{2i} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2i-1)}{2^{i+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2i+1}}} \text{ e } G_{2i+1} = \frac{i!}{2\alpha^{i+1}}; x \ll 1 \rightarrow e^x \approx 1+x; P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n};$$

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma_n^2}}; \langle n \rangle = Np; \langle n^2 \rangle = Np(q + Np); \sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2; D = \frac{2l^2 pq}{\tau}; D = \frac{kT}{6\pi a \eta}; dx dy dz = 4\pi r^2 dr;$$

$$dx dy = 2\pi r dr; f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}; v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}; \beta = (1/kT); dp(\Gamma) = (1/Z) e^{-\beta E} d\Gamma; Z = z^N;$$

$$z = \int \dots \int e^{-\beta E_i} d\Gamma_i; \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z); F = -\left(\frac{1}{\beta}\right) \ln Z; P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}; S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}; \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\rho_N \pi d^2}; P = \frac{\rho}{3} \langle v^2 \rangle;$$

$$1) \rho_N = \frac{N}{V} = 2 \times 10^{19} \text{ átomos/cm}^3 \quad \langle E_i \rangle = 5,2 \times 10^{-21} \text{ J} = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

$$m(\text{Ne}) = 20 \text{ u.m.a.} \quad \text{onde } 1 \text{ u.m.a.} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$f_{\text{col}} = \frac{N_{\text{col}}}{\Delta t} = 10^8 \text{ colisões/s}$$

$$a) P = ? \quad T = ? \quad b) \langle v \rangle = ? \quad c) r(\text{Ne}) = ?$$

$$d) \sqrt{\langle E_i^2 \rangle} = E_{qm}$$

$$\underline{T.E.E.} \quad \langle E_i \rangle = \frac{3}{2} kT \quad k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$T = \frac{2}{3} \frac{\langle E_i \rangle}{k} = \frac{2}{3} \times \frac{5,2 \times 10^{-21}}{1,38 \times 10^{-23}} = \frac{2 \times 5,2}{3 \times 1,38} \times 10^2 = 2,51 \times 10^2$$

$$\boxed{T = 251 \text{ K}}$$

$$\underline{PV = NkT} \quad \therefore P = \frac{N}{V} kT = \rho_N kT$$

$$\rho_N = \frac{N}{V} = \frac{2 \times 10^{19} \text{ átomos}}{1 \text{ cm}^3} = \frac{2 \times 10^{19}}{(10^{-2} \text{ m})^3} = \frac{2 \times 10^{19}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 2 \times 10^{25} \text{ átomos/m}^3$$

$$P = p_n kT = 2 \times 10^{25} \times 1,38 \times 10^{-23} \times 251 = 693 \times 10^2 \text{ Pa} = 0,7 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$P = 0,7 \text{ atm}$$

$$b) \langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv \quad \text{onde} \quad f(v) = \underbrace{4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}}_A v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

$$\langle v \rangle = A \underbrace{\int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv}_{G_3}$$

Dist. velocidade de Maxwell

$$\langle v \rangle = A G_3 = A \frac{1}{2\alpha^2} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \left( \frac{2kT}{m} \right)^2 = 2\pi \left( \frac{m^3}{(2\pi kT)^3} \frac{(2kT)^4}{m^4} \right)^{1/2}$$

$$\langle v \rangle = \left( \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^3 (kT)^3} \frac{2^4 (kT)^4}{m^4} \right)^{1/2} = \left( \frac{2^4}{2\pi} \frac{kT}{m} \right)^{1/2} = \left( \frac{2^3}{\pi} \frac{kT}{m} \right)^{1/2}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{1,38 \times 10^{-23} \times 251}{20 \times 1,66 \times 10^{-27}}}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \times 1,38 \times 251 \times 10^4}{20 \times 1,66 \times \pi}} = \sqrt{26,5677 \times 10^4} = 515 \text{ m/s}$$

$$\langle v \rangle = 515 \text{ m/s}$$

Livre caminho médio

$$d = 2r$$

$$\vec{v}_{gr} \approx \langle v \rangle$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} p_n \pi d^2} = \frac{1}{\sqrt{2} p_n \pi 4r^2}$$

$$\lambda = \frac{\Delta s}{N_{col}} = \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \left( \frac{\Delta t}{N_{col}} \right) = \frac{\langle v \rangle}{f_{col.}} = \frac{515}{10^9} = 515 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$\downarrow \frac{1}{f_{col}}$

$$r^2 = \frac{1}{4\sqrt{2} \rho_n \pi \lambda} = \frac{1}{4\sqrt{2} \cdot 2 \times 10^{25} \times \pi \times 515 \times 10^{-8}}$$

$$r^2 = \frac{1}{8\sqrt{2} \times \pi \times 515 \times 10^{17}} = \frac{10^{-17}}{18,3 \times 10^3} = 5,46 \times 10^{-5} \times 10^{-17}$$

$$r^2 = 5,46 \times 10^{-22} \quad \therefore \quad r = \sqrt{5,46 \times 10^{-22}} \quad \therefore \quad r = 2,33 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$r = 0,23 \text{ \AA}$$

d)  $E_{qm} = \sqrt{\langle E_i^2 \rangle}$  sabiendo que  $E_i = \frac{1}{2} m v^2$

$$\langle E_i^2 \rangle = \left\langle \left( \frac{1}{2} m v^2 \right)^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{4} m^2 v^4 \right\rangle = \frac{1}{4} m^2 \langle v^4 \rangle$$

$$\langle v^4 \rangle = \int_0^\infty v^4 f(v) dv$$

$$E_{qm} = \sqrt{\frac{1}{4} m^2 \langle v^4 \rangle}$$

$$\langle v^4 \rangle = A \underbrace{\int_0^\infty v^6 e^{-\alpha v^2} dv}_{G_6} = A G_6$$

$$E_{qm} = \frac{1}{2} m \sqrt{\langle v^4 \rangle}$$

$$\langle v^4 \rangle = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left( \frac{3 \times 5}{2^4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^7}} \right) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{15}{16} \left( \frac{\pi (2kT)^7}{m^7} \right)^{1/2}$$

$$\langle v^4 \rangle = \frac{15}{4} \left( \frac{m^3}{(2\pi)^3 (kT)^3} \frac{2^7 \pi (kT)^7}{m^7} \right)^{1/2} = 15 \left( \frac{2^7 \pi}{2^4 \cdot 2^3 \pi^3} \frac{(kT)^4}{m^4} \right)^{1/2}$$

$$\langle v^4 \rangle = 15 \left( \frac{(kT)^4}{\pi^2 m^4} \right)^{1/2} = \frac{15}{\pi} \left( \frac{kT}{m} \right)^2$$

Substituindo em  $E_{qm} = \frac{1}{2} m \sqrt{\langle v^4 \rangle}$

$$E_{qm} = \frac{1}{2} m \sqrt{\frac{15}{\pi} \left( \frac{kT}{m} \right)^2} = \frac{1}{2} \cancel{m} \left( \frac{kT}{\cancel{m}} \right) \sqrt{\frac{15}{\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{\pi}} kT$$

$$E_{qm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{\pi}} 1,38 \times 10^{-23} \times 251 = 378 \times 10^{-23} \text{ J}$$

$$E_{qm} = 3,78 \times 10^{-21} \text{ J}$$

## 2) Movimento Browniano 1D



passo  $\Rightarrow l = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m}$   
 $\tau = 2 \text{ s}$

$p = 0,6$  (probab. direita)  
 $q = 1 - p = 0,4$  (probab. esquerda)

a)  $N = 10$      $n = 5$      $P(n) = ?$     Discutir (equi prob.)

b)  $D = ?$     coeficiente de difusão     $p = q = 0,5$

c)  $\langle x \rangle = 100 \text{ m}$     e     $\langle x \rangle = 1000 \text{ m}$   
 $n = ?$      $n = ?$

d)  $\Delta t (\langle x \rangle = 1000 \text{ m}) = ?$     Comparar com M.R.U.

Relações matemáticas importantes:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$

Dados:

$1 \text{ u.m.a.} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ ;  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ;  $1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}$ ;  $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ .

$m(\text{He}) = 4 \text{ u.m.a.}$ ,  $m(\text{C}) = 12 \text{ u.m.a.}$ ,  $m(\text{O}) = 16 \text{ u.m.a.}$ ,  $m(\text{Ne}) = 20 \text{ u.m.a.}$ ,  $m(\text{O}_2) = 32 \text{ u.m.a.}$ ,  $m(\text{N}_2) = 28 \text{ u.m.a.}$  e  $m(\text{Ar}) = 39,95 \text{ u.m.a.}$

Formulário:

$G_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx \Rightarrow G_{2l} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2l-1)}{2^{l+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2l+1}}} e$  e  $G_{2l+1} = \frac{l!}{2\alpha^{l+1}}$ ;  $x \ll 1 \rightarrow e^x \approx 1 + x$ ;  $P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$

$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma_n^2}}$ ;  $\langle n \rangle = Np$ ;  $\langle n^2 \rangle = Np(q + Np)$ ;  $\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ ;  $D = \frac{2l^2 pq}{\tau}$ ;  $D = \frac{kT}{6\pi a \eta}$ ;  $dx dy dz = 4\pi r^2 dr$ ;

$dx dy = 2\pi r dr$ ;  $f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$ ;  $v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ ;  $\beta = (1/kT)$ ;  $dp(\Gamma) = (1/Z) e^{-\beta E} d\Gamma$ ;  $Z = z^N$ ;  
 $z = \int \dots \int e^{-\beta E_i} d\Gamma_i$ ;  $\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z)$ ;  $F = -\left(\frac{1}{\beta}\right) \ln Z$ ;  $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$ ;  $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$ ;  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\rho_N \pi a^2}}$ ;  $P = \frac{\rho}{3} \langle v^2 \rangle$ ;

a) Sabemos que o movimento Browniano é descrito por uma distribuição binomial:

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad \text{onde } p+q=1$$

$$P(5) = \frac{10!}{5! 5!} 0,6^5 0,4^5 = \frac{2 \times 3 \times 2 \times 7 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5!} 0,6^5 \times 0,4^5$$

$$P(5) = 252 \times 0,6^5 \times 0,4^5 = 0,2$$

A probabilidade de dar 5 passos para direita em 10 passos sendo que o passo para a direita tem probabilidade de 0,6 é 0,2.

$$P_{eq}(5) = \frac{10!}{5!5!} \times 0,5^5 \times 0,5^5 = 252 \times 0,5^{10} = 0,246$$

Comparativamente temos a mesma quantidade de sequencias misturando 5 passos para a direita e para a esquerda, porém como a probabilidade de cada lado é diferente isto provoca uma probabilidade final diferente. Sendo da equiprobabilidade maior que a anterior.  
(ver gráficos no final)

$$b) \quad D = \frac{2l^2 pq}{\tau} \quad \begin{array}{ll} l = 0,8 \text{ m} & \tau = 2 \text{ s} \\ p = 0,6 & q = 0,4 \end{array}$$

$$D = \frac{2 \times 0,8^2 \times 0,6 \times 0,4}{2} = 0,15 \quad \Rightarrow \quad D = 0,15 \text{ m}^2/\text{s}$$

$A = 0,15 \text{ m}^2$   em 1s

$$D_{eq} = \frac{2 \times 0,8^2 \times 0,5^2}{2} = 0,16 \quad \Rightarrow \quad D_{eq} = 0,16 \text{ m}^2/\text{s}$$

$A = 0,16 \text{ m}^2$   em 1s

$$c) \quad x = nl - (N-n)l$$

$$x = nl - Nl + nl = 2nl - Nl$$

$N-n = n^\circ \text{ de passos p/esq.}$   
 $n = n^\circ \text{ de passos p/dir.}$

$$x = 2nl - Nl$$

$$\langle x \rangle = \langle 2nl - Nl \rangle = 2l \langle n \rangle - Nl$$

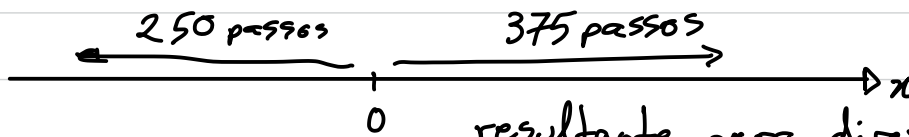
onde  $\langle n \rangle = Np \Rightarrow \langle x \rangle = 2lNp - Nl$   
 $\langle x \rangle = Nl(2p-1)$   
 $\langle x \rangle = Nl(2p-1) = N \cdot 0,8(2 \times 0,6 - 1) = 0,16N$

$\langle x \rangle = 0,16N \quad \therefore N_1$  quando  $\langle x_1 \rangle = 100 \text{ m}$   
 $N_1 = \frac{\langle x_1 \rangle}{0,16} = \frac{100}{0,16} = 625 \text{ passos}$

Ou seja, são necessários 625 passos para obter um deslocamento médio de 100m

$\langle n \rangle = Np = 625 \times 0,6 = 375$

$\Rightarrow$  Se tivessem sido todos na mesma direção, a pessoa teria deslocado  $375 \times 0,8 = 300 \text{ m}$

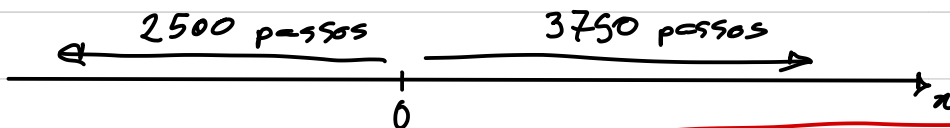


resultante para direita foram só 125 passos

$125 \times 0,8 \text{ m} = 100 \text{ m}$

$N_2$  quando  $\langle x_2 \rangle = 1000 \text{ m} \Rightarrow N_2 = \frac{\langle x_2 \rangle}{0,16} = \frac{1000}{0,16} = 6250 \text{ passos}$

Assim  $\langle n \rangle = Np = 6250 \times 0,6 = 3750$



Então são necessários em média 375 passos para direita para o deslocamento médio ser de 100m e 3750 para 1000m.

d) Como cada passo leva 2s, para deslocar 1000m em média foram necessários 6250 passos no total. Então o tempo total foi de  $12500 \text{ s} = 3 \text{ h } 28 \text{ min } 20 \text{ s}$ .



Mas no MRU  $v = \frac{l}{t} = \frac{0,8}{2} = 0,4 \text{ m/s}$ . Assim, para deslocar 1000 m são necessárias 2500 s = 41 min e 40 s.

Portanto, podemos concluir que o movimento Browniano é muito mais lento que o MRU, pois no MB a pessoa, ou partícula, vai e volta muitas vezes até chegar a distância desejada. Enquanto no MRU o movimento é direto apenas de ida ao ponto desejado.

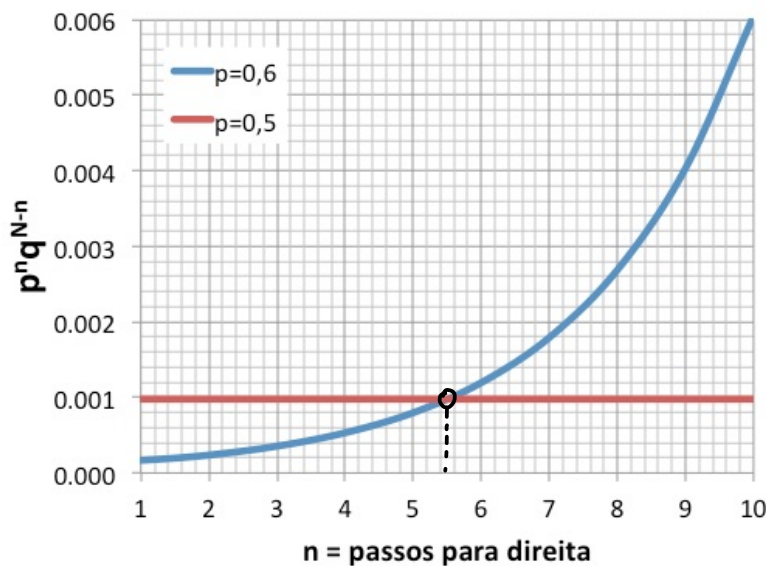


Gráfico comparando  $f(n) = p^n q^{N-n}$  para equip.  $p=0,6$  e  $p=0,5$ . Note que para  $n=5,5$   $f(5,5) = f_{\text{equip}}(5,5)$   $f(n < 5,5) < f_{\text{equip}}(n < 5,5)$   $f(n > 5,5) > f_{\text{equip}}(n > 5,5)$

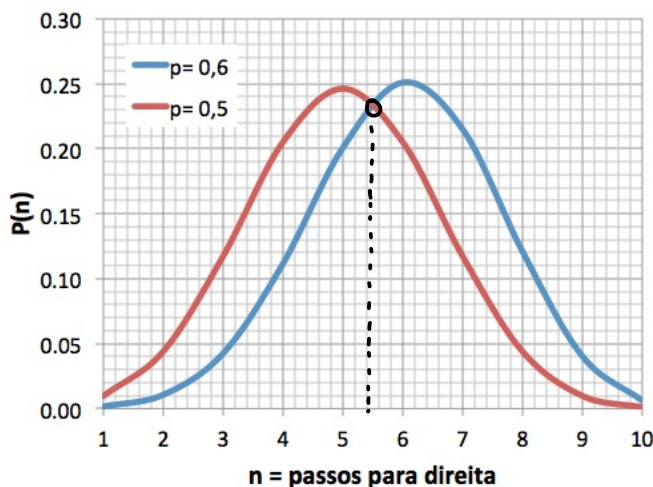


Gráfico da probabilidade. Como a multiplicidade é igual nos dois casos a diferença está na  $f(n)$  mostrada acima.

Note que o bebado tem maior tendência de ir para direita

então a probabilidade será maior que a de equiprobabilidade quando o nº de passos para direita for maior que os da esquerda, ou seja,  $P(n) > P_{\text{equip.}}(n)$  quando  $n > N-n$ .