

2º Lista MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II (2º semestre 2020)

Turma: 2020221

Referências principais (nas quais a lista foi baseada):

1. J. Stewart , *Cálculo II* Pioneira Thomson Learning,
2. A. Chiang, K. Wainwright, *Matemática para Economia*,
3. D. B. Júnior, *Cálculo para ciências humanas*,
4. S.T. Tan, *Matemática Aplicada a Administração e Economia*,
5. J. E. Weber, *Matemática para Economia e Administração*.

1 Parte 1

1.1 Lista anterior

Recorde conteúdo na Lista 1

2 Parte 2

2.1 Polinômio de Taylor

Problema 2.1. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Escreva a fórmula do polinômio de Taylor de ordem 2 em torno de um ponto $p \in \Omega$, em termos do Hessiano e gradiente.

Problema 2.2. Seja $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$. Determine o Polinômio de Taylor de ordem 2 em torno de $(3, -2)$.

2.2 Pontos críticos

Problema 2.3. Seja $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$. Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

Problema 2.4. Determine e classifique os pontos críticos de f .

- 1) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$
- 2) $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$
- 3) $f(x, y) = xy - 2x - y$
- 4) $f(x, y) = \exp(x) \cos(y)$
- 5) $f(x, y) = x \sin(y)$
- 6) $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

Problema 2.5. Seja $f(x, y) = (x^2 - y^2 + 6y - 9) \exp(y - 3)$

- a) Determine os pontos críticos.
- b) Classifique os pontos críticos em pontos de sela, máximos e/ou mínimos locais.

Problema 2.6. Sejam x_1 e x_2 as demandas dos produtos 1 e 2. Suponha que os preços dos produtos estejam relacionados com as demandas da seguinte forma $p_1 = 36 - 3x_1$ e $p_2 = 40 - 5x_2$. Seja C a função custo conjunto definida como $C = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$. Temos então que o lucro é $L = p_1x_1 + p_2x_2 - C$. Determine a quantidade e os preços que maximizam (localmente) o lucro e ache o lucro máximo (local).

Problema 2.7. Suponha que a função de produção seja dada por: $16z = 65 - 2(x - 5)^2 - 4(y - 4)^2$. Os preços unitários dos insumos x e y são 8 e 4 respectivamente, e o preço unitário do produto acabado é 32. Temos então que o lucro é $L = 32z - 8x - 4y$. Determine o lucro máximo (local).

2.3 Respostas da Parte 2

Problema 2.1:

$$\begin{aligned} P_2(x_1, x_2) &= f(p) + \langle \nabla f(p), (x_1 - p_1, x_2 - p_2) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} [x_1 - p_1 \ x_2 - p_2] \text{Hess} f(p) \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$\text{Hess} f(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix}$$

Problema 2.2:

$$P_2(x, y) = 24 + 32(x-3) - 18(y+2) + 8(x-3)^2 - 24(x-3)(y+2) + 3(y+2)^2$$

Problema 2.3:

- (a) O conjunto dos pontos críticos é: $\{(0, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (2, 2)\}$
- (b) Pontos de sela: $(0, 0), (0, 2), (2, 0)$ e $(2, 2)$ Ponto de máximo local: $(1, 1)$.

Problema 2.4

- 1) Mínimo local $(0, 0)$ e pontos de sela $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$
- 2) Os pontos (x_0, x_0) são máximos locais.
- 3) Ponto de sela $(1, 2)$.
- 4) Nenhum.
- 5) Pontos de sela $(0, n\pi)$ para n inteiro.
- 6) Máximo local $(0, 0)$, mínimo local $(0, 2)$ e pontos de sela $(1, 1)$ e $(-1, 1)$.

Problema 2.5

a) $(0, 3), (0, 1)$.

b) $(0, 3)$ é ponto de sela; $(0, 1)$ é ponto de mínimo local.

Problema 2.6

$x_1 = 4, x_2 = 2, p_1 = 24, p_2 = 30$ e lucro máximo é 112.

Problema 2.7

$x = 4, y = \frac{15}{4}$ e lucro máximo é 39.

3 Parte 3

3.1 VII Máximos e mínimos absolutos

Problema 3.1. Seja $f(x, y) = 2x^2 + x + y^2 - 2$ Determine os valores máximos e mínimos da função f na região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Problema 3.2. Determine os pontos críticos e valores máximos e mínimos absolutos de f no conjunto D .

- 1) $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$, D é a região triangular fechada com vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$
- 2) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
- 3) $f(x, y) = 1 + xy - x - y$, D é a região limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 4$.
- 4) $F(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$

Problema 3.3. Determine os pontos críticos e valores máximos e mínimos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 1$ no conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 4\}$.

3.2 Respostas da parte 3

Problema 3.1

Verificamos que $(-1/4, 0)$ é ponto de mínimo absoluto e o *valor mínimo* é $f(-1/4, 0) = -17/8$. O ponto de máximo global por sua vez é $(2, 0)$ e o *valor máximo* é 8.

Problema 3.2

- 1) Valor mínimo $-7 = f(4, 0)$, valor máximo $13 = f(4, 5)$.
- 2) Valor máximo $7 = f(1, 1) = f(-1, 1)$, valor mínimo $4 = f(0, 0)$.
- 3) Valor máximo $3 = f(2, 4)$, valor mínimo $-9 = f(-2, 4)$

4) Valor máximo $2 = f(1, 0)$, valor mínimo $-2 = f(-1, 0)$.

Problema 3.3:

O ponto crítico é $(-1, 0)$. O valor máximo é $49/4 = f(5/2, 0)$ e o valor mínimo é $0 = f(-1, 0)$.

4 Parte 4:

4.1 VIII- Plano tangente e o teorema da função implícita

Problema 4.1 (*). Enuncie o teorema da função implícita para uma função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Problema 4.2 (*). Enuncie o teorema da função implícita para uma função $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Problema 4.3. Determine a equação do plano tangente à superfície S no ponto p .

- (1) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$ e $p = (4, -1, 1)$.
- (2) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 4xz = 4\}$ e $p = (1, 0, 1)$.
- (3) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z + 1 = x \exp(y) \cos(z)\}$ e $p = (1, 0, 0)$.

Problema 4.4. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1\}$.

- (1) Esboce a superfície regular S .
- (2) Seja $p = (\frac{1}{2}(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}), \frac{\sqrt{3}}{2}(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}), \frac{\sqrt{2}}{2})$. Determine a equação do plano tangente à S no ponto p .

Problema 4.5 (*). Dê uma interpretação geométrica do plano tangente à uma superfície regular.

Problema 4.6 (*). Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela intersecção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

Problema 4.7 (*). Determine a reta tangente à intersecção do cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 2$ com o gráfico da função $h(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.

4.2 Respostas da Parte 4

Problema 4.1 (Teorema da função implícita em $\mathbb{R}^2$)

Seja $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Suponha que a curva de nível $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = c\}$ é regular (i.e., o vetor gradiente não se anula ao longo de C .) Então para todo $p \in C$ existe um $\epsilon > 0$ tal que uma das afirmações abaixo é verdadeira:

$$(a) \ B_\epsilon(p) \cap C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = h(x), x \in I\}$$

$$(b) \ B_\epsilon(p) \cap C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = h(y), y \in I\}$$

Além disto, a função h é de classe C^1 e o Item (a) acontece se $\frac{\partial g}{\partial y}(p) \neq 0$ e o Item (b) acontece se $\frac{\partial g}{\partial x}(p) \neq 0$.

Problema 4.2 (Teorema da função implícita em $\mathbb{R}^3$)

Seja $g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Suponha que a superfície de nível $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = c\}$ é regular (i.e., o vetor gradiente não se anula ao longo de S .) Então para todo $p \in S$ existe um $\epsilon > 0$ tal que uma das afirmações abaixo é verdadeira:

$$(a) \ B_\epsilon(p) \cap S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = h(x, y), (x, y) \in D\}$$

$$(b) \ B_\epsilon(p) \cap S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = h(y, z), (y, z) \in D\}$$

$$(c) \ B_\epsilon(p) \cap S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = h(z, x), (z, x) \in D\}$$

Além disto, a função h é de classe C^1 e o Item (a) acontece se $\frac{\partial g}{\partial z}(p) \neq 0$ e o Item (b) acontece se $\frac{\partial g}{\partial x}(p) \neq 0$ e o Item (c) acontece se $\frac{\partial g}{\partial y}(p) \neq 0$

Problema 4.3

$$1) \ 4x - 2y + 3z = 21$$

$$2) \ 3x - y + z = 4$$

$$3) \ x + y - z = 1$$

Problema 4.4

(1) S é um toro.

$$(2) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{1}{2}(3 + \frac{\sqrt{2}}{2})) + \frac{\sqrt{6}}{2}(y - \frac{\sqrt{3}}{2}(3 + \frac{\sqrt{2}}{2})) + \sqrt{2}(z - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

Problema 4.5 (Interpretação geométrica do plano tangente)

Sejam $g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 e $c \in g(\Omega)$. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / g(x, y, z) = c\}$ a superfície de nível associada ao valor c . Suponha que $\text{grad } g(x)$ é diferente de zero para todo $x \in S$.

- a) Seja $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada C^1 tal que sua imagem está contida em S e $\beta(0) = p$. Então o vetor velocidade de β está contido no plano tangente $T_p S$ da superfície de nível S no ponto p .
- b) Seja $T_p S$ o plano tangente a um ponto $p \in S$ e $v \in T_p S$. Então existe uma curva β de classe C^1 cuja a imagem esta contida em S e tal que o vetor velocidade $\beta'(0) = v$.

Problema 4.6

$$\alpha(t) = (-1 - 10t, 1 - 16t, 2 - 12t)$$

Problema 4.7

$$\beta(s) = (1, 1, 4) + s(1, -1, 0)$$

5 Parte 5

5.1 IX- Multiplicadores de Lagrange

Problema 5.1. Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximos e mínimos da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

- a) $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$; $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = 35\}$ onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
- b) $f(x, y, z) = xyz$; $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = 6\}$ onde $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
- c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = 1\}$ onde $g(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$.
- d) $f(x, y, z) = x + 2y$; $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g_1(x, y, z) = 1, g_2(x, y, z) = 4\}$ onde $g_1(x, y, z) = x + y + z$, $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2$.
- e) $f(x, y, z) = yz + xy$; $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g_1(x, y, z) = 1, g_2(x, y, z) = 1\}$ onde $g_1(x, y, z) = xy$, $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2$.
- f) $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 1\}$ onde $g_1(x, y, z) = x + y - z$, $g_2(x, y, z) = x^2 + 2z^2$.

Problema 5.2. Sejam $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{(x-2)^2}{9} + y^2 + z^2 = 1\}$ e $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$.

- a) Determine a equação do plano tangente a superfície S no ponto $(3, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
- b) Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f restrita a superfície S e os pontos onde f assume tais valores.

Problema 5.3. Seja $U(x, y, z) = xyz$ a função utilidade onde x, y, z representam o número de unidades das mercadorias A, B, C consumidas mensalmente por uma pessoa. Sejam $R\$2,00$, $R\$3,00$ e $R\$4,00$ os preços unitários de A, B, C respectivamente. Suponha que as despesas para mercadorias sejam $R\$90,00$. Quantas unidades de cada mercadoria de cada tipo devem ser adquiridas para maximizar a utilidade?

Problema 5.4. Na teoria clássica da demanda, o problema do consumidor consiste em escolher uma cesta de maneira que ele obtenha o máximo de utilidade à sua restrição orçamentária. Considerando dois bens 1 e 2 e denotando por x_1 e x_2 as respectivas quantidades demandadas desses bens, admita que a função utilidade seja dada por:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}}$$

Se o preço do bem 1 é \$30,00, o preço do bem 2 é \$20,00, a renda do consumidor é \$100,00 e esses bens são desejáveis, a restrição orçamentária é então dada por:

$$30 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 = 100$$

Determine a cesta ótima para este consumidor.

Problema 5.5. O problema da firma consiste em minimizar os custos de produção. Assim, se temos dois fatores de produção digamos 1 e 2 com respectivos preços \$2,00 e \$5,00, queremos encontrar a maneira mais barata de produzir um nível 10 de "output". Se x_1 e x_2 são as respectivas quantidades usadas dos dois fatores e a função de produção da firma é dada por:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{5}} \cdot x_2^{\frac{4}{5}}$$

o problema da firma consiste então em minimizar

$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

de maneira que se obtenha o nível

$$x_1^{\frac{1}{5}} \cdot x_2^{\frac{4}{5}} = 10$$

Determine a quantidade ótima a ser usada dos fatores 1 e 2.

5.2 Respostas da parte 5

Problema 5.1

- a) Máximo $f(1, 3, 5) = 70$, mínimo $f(-1, -3, -5) = -70$.
- b) Máximo $2/\sqrt{3}$, mínimo $-2/\sqrt{3}$

- c) Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1.
- d) Máximo $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$, mínimo $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$.
- e) Máximo $3/2$, mínimo $1/2$.
- f) Máximo $2\sqrt{6} = f(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$, mínimo $-2\sqrt{6} = f(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6})$.

Problema 5.2

- a) $\frac{2}{9}(x - 3) + \frac{4}{3}(y - \frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(z - \frac{2}{3}) = 0$.
- b) O valor máximo é 16 e ocorre no ponto $(5, 0, 0)$. O valor mínimo é $56/64$ e ocorre na curva $\{(7/8, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + z^2 = 55/64\}$

Problema 5.3: $x = 15$, $y = 10$, e $z = \frac{15}{2}$.

Problema 5.4:

A cesta ótima será $x_1 = \frac{10}{9}$ e $x_2 = \frac{10}{3}$.

Problema 5.5: $x_1 = 5\sqrt[5]{625}$ e $x_2 = 8\sqrt[5]{625}$.