AULA MECÂNICA 09/11

- MECÂNICA LAGRANGIANA.
- MECÂNICA HAMILTONIANA.
- MECÂNICA COM VÍNCULOS.

- MECÂNICA LAGRANGIANA É PRINCÍPIO VARIACIONAL.

- FUNCIONAIS SOBRE CURVAS C^2 DE $\mathbb{R}^{3n}$.

$\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{3n}$.

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)\, dt.$$

$L : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Φ : CONJUNTO DE CURVAS $\to \mathbb{R}$.

QUANDO O FUNCIONAL Φ É DIFERENCIÁVEL.

É O QUE SIGNIFICA ISSO.

- ESPAÇO DE CURVAS. $C^2([a,b], \mathbb{R}^{3n})$

$C^2([a,b]; \mathbb{R}^m)$.

$\Phi : C^2([a,b], \mathbb{R}^{3n}) \to \mathbb{R}$.

Digitalizado com

PERTURBAÇÕES DE γ É ESTUDAR PERTURBAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM DE $\oint$.

$\tilde{\gamma}_\varepsilon(t) = \gamma(t) + \varepsilon \cdot h(t)$.

$$h(t) \in C^2([a,b], \mathbb{R}^{3n})$$

$W: (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \quad W(\varepsilon) = \oint(\gamma + \varepsilon h)$.

PERTURBAÇÕES COM EXTREMOS FIXOS.

~~$h(t) \in C^2([a,b], \mathbb{R}^{3n})$ $(h(a) = h(b) = 0)$~~

$$C_0^2([a,b], \mathbb{R}^n) = \{h \in C^2([a,b], \mathbb{R}^n),\ h(a) = h(b) = 0\}$$

SE L É C^2, PODEMOS ESCREVER, P/ $\|h\|$ PEQUENA.

$$\oint(\gamma + \varepsilon \cdot h) = \oint(\gamma) + \varepsilon \cdot \boxed{I(h)} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Digitalizado com

ONDE T É UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR.

E T É DADA POR.

$$T(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma,\dot\gamma,t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}(\gamma,\dot\gamma,t)\right)\right) h\, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot x}(\gamma,\dot\gamma,t)\, h \Big|_a^b$$

EM PARTICULAR, SE ESTAMOS ESTUDANDO

$\oint$ RESTRITA A $C^2([a,b], R^m, \gamma(a), \gamma(b))$.

ENTÃO $h \in C_0^2([a,b], R^m)$.

$$\oint(\gamma+\epsilon h) = \oint(\gamma) + T(h)\cdot\epsilon + O(\epsilon)$$

ONDE

$$T(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)\right] h\, dt.$$

Digitalizado com

PROCURANDO PONTOS EXTREMAIS
(PONTOS DE MÍNIMO (OU MÁXIMO) LOCAIS).
DE

$\int_L$ SÃO PONTOS ONDE NECESSARIAMENTE

$T \equiv 0$.

LEMA! $T \equiv 0$ SE, E SÓ SE,
VALE QUE, P/ TODO $\pi \in [a,b]$.

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(\pi), \dot{\gamma}(\pi), \pi) - \frac{d}{d\pi}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\gamma(\pi), \dot{\gamma}(\pi), \pi)\right) \equiv 0.$$

Digitalizado com

~~UMA~~ DEFINIÇÃO: UMA CURVA γ É UM EXTREMAL DO FUNCIONAL

$\int_L$ SE VALE QUE

$$\frac{\partial L(\gamma,\dot\gamma,t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\gamma,\dot\gamma,t)}{\partial \dot x} = 0.$$

- PONTOS DE MÁXIMO E MÍNIMO LOCAIS MAIS TAMBÉM "PONTOS DE INFLEXÃO" OU SELA.

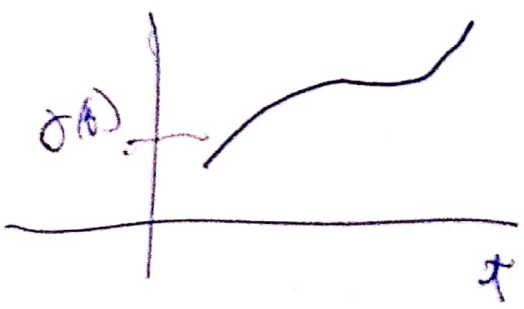
EXEMPLO 1:

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}$

$L: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$L(\gamma,\dot\gamma,t) = \sqrt{1+\dot\gamma^2}$$

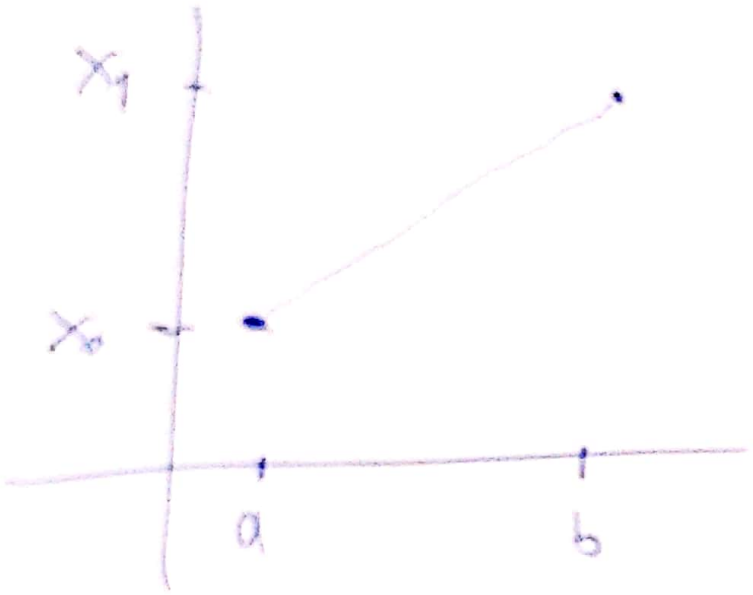
L CALCULA O COMPRIMENTO DO GRÁFICO DE γ.



Digitalizado com

Se $\gamma(a) = x_0 \quad \gamma(b) = x_1$

Solução de menor comprimento será



$$\gamma(t) = x_0 + \frac{t-a}{b-a}(x_1 - x_0)$$

CALCULAR A EQUAÇÃO DE EULER LAGRANGE P/ PONTOS EXTREMAIS

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{1+\dot{\gamma}^2}}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{1+\dot{\gamma}^2}} = C \Rightarrow \dot{\gamma}^2 = C^2(1+\dot{\gamma}^2)$$

$$(1-C^2)\dot{\gamma}^2 = C^2$$

$$\dot{\gamma}^2 = \frac{C^2}{1-C^2} = C'$$

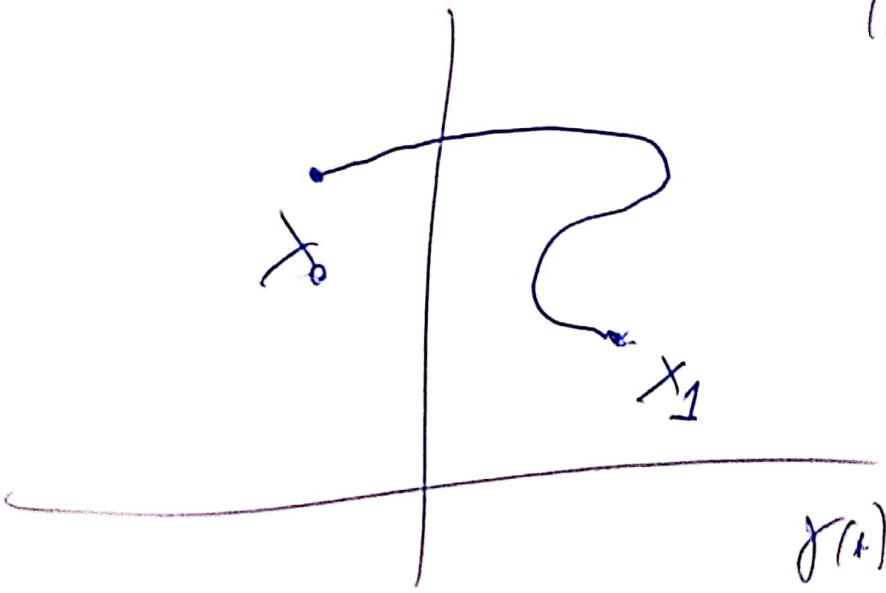
Digitalizado com

UMA CURVA É UM EXTREMAL DO FUNCIONAL SE E SÓ SE:

$$\gamma(t) = c_1 t + c_2.$$

$\gamma \in C^2([a,b], \mathbb{R}^2)(x_0, x_1)$ $\quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$



$\gamma(t) = (\gamma_1, \gamma_2)$

$$L : (\gamma, \dot{\gamma}, t) = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}$$

$$\Phi_L = \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma}, t)\, dt.$$

Φ_L É O COMPRIMENTO DE γ.

Digitalizado com

QUEM SÃO OS PONTOS EXTREMAIS DE $\mathcal{L}$?

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\dot{\gamma}_1}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\dot{\gamma}_2}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}}$$

COMO $\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$

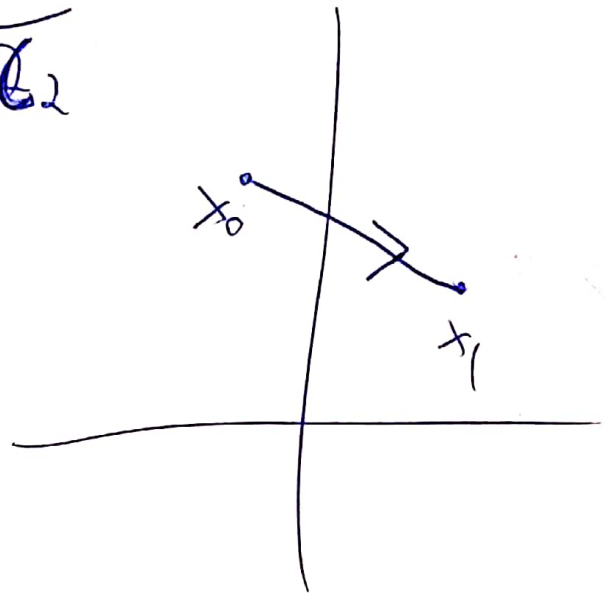
TEMOS QUE, EM CURVAS EXTREMAIS

VALE QUE

$$\frac{\dot{\gamma}_1}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}} = C_1 \quad \text{E} \quad \frac{\dot{\gamma}_2}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}} = C_2.$$

Digitalizado com

SEGUE QUE A IMAGEM DE γ É UM SEGMENTO DE RETA DE INCLINAÇÃO $\frac{c_1}{c_2}$.



EXEMPLO 3:

$$L(\gamma) = \dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2.$$

$$\Phi_L = \int_a^b \dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 \, dt$$

EQ. E-L.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0. \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2\dot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 2\dot{x}_2.$$

Digitalizado com

Lagr: EQ. E-L.

$$\frac{d}{dt}(2\cdot\dot{\gamma}_1)=0 \qquad \frac{d}{dt}(2\cdot\dot{\gamma}_2)=0.$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}_1 = C_1 \qquad \dot{\gamma}_2 = C_2.$$

Q EQ. DIFERENCIAL P/ UMA RETA EM COORDENADAS POLARES ?

INVARIÂNCIA DE COORDENADAS.

$L: R^m \times R^m \times R \to R$. (1 SISTEMA DE COORDENADAS)

SEJA $\psi: R^m \to R^m$ DIFEOMORFISMO C^2.

$\gamma: [a,b] \to R^m$

$\tilde{\gamma}: [0,5] \to R^m \qquad \tilde{\gamma} = \psi \circ \gamma.$

Digitalizado com

$$\dot{\tilde{\gamma}} = D\psi(\gamma)\cdot\dot{\gamma}$$

$$\tilde{L}_2 : (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

$$\tilde{L}_2(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, t) = L(x, \dot{x}, t) \quad \text{ONDE}$$

$$\psi(x) = \tilde{x} \quad \text{E} \quad D\psi(x)\cdot\dot{x} = \dot{\tilde{x}}.$$

$$\oint_{\tilde{L}_2} : \int_a^b \tilde{L}_2(\tilde{\gamma}, \dot{\tilde{\gamma}}, t)\,dt.$$

$L_1 = \dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 =$ PONTOS EXTREMAIS SÃO RETAS
$\langle(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2), (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)\rangle$.

EM COORDENADAS POLARES.

$(x_1, x_2) \to (r, \theta)$. $\quad L_2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$\dot{\gamma} = \dot{r}\,e_r + r\dot{\theta}\,e_\theta$

Digitalizado com

EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2r^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 2r\dot{\theta}^2 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2\dot{r}$$

EQUAÇÕES SÃO.

$$\frac{d}{dt}\left(2r^2\dot{\theta}\right) = 0. \Rightarrow \quad r^2\cdot\dot{\theta} = C_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(2\dot{r}\right) = 2r\dot{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2$$

Digitalizado com

MECÂNICA NEWTONIANA CONSERVATIVA:

$(r, \dot{r})$ MOVIMENTO DE n PONTOS MATERIAIS EM $\mathbb{R}^3$

$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$.

$r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

$r_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

MASSAS $m_1, \ldots, m_n$. TODAS POSITIVAS

$U : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ ENERGIA POTENCIAL.

$m_i \ddot{r}_i$.

$$\frac{d}{dt}(m_i r_i) = (m_i \dot{r}_i) = m_i \ddot{r}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial r_i}$$

Digitalizado com

SEJA $L(r, \dot{r}, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} - U(r)$.

$r : [a,b] \to \mathbb{R}^{3n}$

ENTÃO r É UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE NEWTON SE, E SÓ SE, r É UM EXTREMAL DO FUNCIONAL

$$\int_a^b L(r, \dot{r}, t)\, dt.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m_i \dot{r}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$$

Digitalizado com

PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO DE HAMILTON

PRINCÍPIO DA AÇÃO EXTREMAL

A É UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO
SE E SÓ SE ELA FOR UM EXTREMO DO FUNCIONAL

$$\vec{q}(t) \quad S = \int_0^t L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

FUNCIONAL AÇÃO

$$L = T(q) - U(q)$$

LAGRANGIANA

$\frac{\partial L}{\partial q}$ = MEDIDA DA TAXA DE VARIAÇÃO

Digitalizado com

MUDANÇA DE COORDENADAS

PODEMOS USAR QUALQUER SISTEMA DE COORDENADAS.

$q = (q_1, q_2 \dots, q_n)$ CADA $q_i \in \mathbb{R}^3$.

$\psi : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$ DIFEOMORFISMO

$q = \psi(r)$.

LAGRANGIANA NAS COORDENADAS $q, \dot{q}$.

$\tilde{L} : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{U}(q)$.

$\tilde{L} = \tilde{T}(q, \dot{q}) - \tilde{U}(q)$.

$T(\dot{r}) - U(r)$

$L = \sum \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} - U(r)$

~~$T(r) = \sum_{i=1}^{n} m_i \langle \dot{r}_i, \dot{r}_i \rangle$~~

~~$\tilde{T} = \sum_{i=1}^{n} m_i \langle D\psi^{-1}(q)\dot{q}, D\psi^{-1}(q)\dot{q} \rangle$~~

Digitalizado com

$\tilde{T}$ É QUADRÁTICA EM $\dot{q}$

$\tilde{T}(q, \dot{q})$ É UMA FORMA QUADRÁTICA DEFINIDA POSITIVA EM $\dot{q}$

$$\tilde{T}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle B(q)\dot{q}, \dot{q} \rangle$$

$B(q)$ MATRIZ DEFINIDA POSITIVA.

q – COORDENADA GENERALIZADA.

$\dot{q}$ – VELOCIDADES GENERALIZADAS.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ – MOMENTOS GENERALIZADOS.

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \langle B(q)\dot{q}, \dot{q} \rangle - U(q)$$

Digitalizado com

COORDENADAS POLARES,

POTENCIAL DERIVADO DE FORÇA CENTRAL.

$$\dot{q} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad U(q) = \phi(r)$$

$$T(q) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$L(q, \dot{q})$$

$$q = (r, \theta)$$

$$L(q, \dot{q}, t) = \left(\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)\right) - \phi(r)$$

$$= m\dot{r}^2 \qquad m\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial L}{}$$

Digitalizado com

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - \vec{\Phi}'(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = p_\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \cdot \dot{r} = p_r \qquad \left| \dot{\theta} = \frac{N}{m r^2} \right.$$

$$\text{Cons}(\dot{\theta}) \quad p_\theta = CTE \Rightarrow m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} = N$$

$$m\ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 - \vec{\Phi}'(r) =$$

$$\boxed{m\ddot{r} = m r \frac{N^2}{m^2 r^4} - \vec{\Phi}'(r) = \frac{N^2}{m r^3} - \vec{\Phi}'(r)}$$

Digitalizado com