TRANSFORMAÇÕES LINEARES

(continuação da aula de 10/11 e aula de 13/11)

Sejam $(V_1, +_1, \cdot_1, 0_1)$ e $(V_2, +_2, \cdot_2, 0_2)$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

DEF: Uma função $T : V_1 \longrightarrow V_2$ é uma transformação linear se

(1) $T(u +_1 v) = T(u) +_2 T(v) \quad \forall\, u, v \in V_1$.

(2) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ e $v \in V_1$, $T(a \cdot_1 v) = a \cdot_2 T(v)$

Exemplos: (1) $Z : V_1 \longrightarrow V_2$

$Z(v) = 0_2 \quad \forall\, v \in V$ (Função constante igual a 0_2)

é uma transformação linear. (Verifique)

(TRANSFORMAÇÃO NULA).

(2) $I : V_1 \longrightarrow V_1$

$I(v) = v \quad \forall\, v \in V$

(TRANSFORMAÇÃO IDENTIDADE)

(3). $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(p(t)) = (p(0), p(1), p(2))$$

Mostrar que T é linear

Suponha que $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

Note que $T(p(t)) = (a_0, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + 2a_1 + 4a_2) \in \mathbb{R}^3$

Mostrar que T é uma transformação linear.

Seja $q(t) \in P_2(\mathbb{R})$, $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$.

(1) $p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) t + (a_2 + b_2) t^2$ (pela definição de soma em $P_2(\mathbb{R})$.)

Então $T(p(t) + q(t)) = (a_0 + b_0, a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2, a_0 + b_0 + 2(a_1 + b_1) + 4(a_2 + b_2))$

$T(p(t)) + T(q(t)) = (a_0, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + 2a_1 + 4a_2) + (b_0, b_0 + b_1 + b_2, b_0 + 2b_1 + 4b_2)$

$= (a_0 + b_0, a_0 + a_1 + a_2 + b_0 + b_1 + b_2, a_0 + 2a_1 + 2a_2 + b_0 + 2b_1 + 2b_2)$

definição de soma em $\mathbb{R}^3$

Logo $T(p(t)) + T(q(t)) = T(p(t) + q(t))$.

(2) $a \in \mathbb{R}$

$$a\,p(t) = aa_0 + aa_1 t + aa_2 t^2$$

$$T(a\,p(t)) = (aa_0,\ aa_0 + aa_1 + aa_2,\ aa_0 + 2aa_1 + 4aa_2)$$

$$a\,T(p(t)) = a\,(a_0,\ a_0 + a_1 + a_2,\ a_0 + 2a_1 + 4a_2)$$

É claro que $T(a\,p(t)) = a\,T(p(t))$.

(4) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x, y) = (x^2, y)$ não é linear

$$T((1,0)+(1,0)) = T(2,0) = (4,0)$$

$$T(1,0) + T(1,0) = (1,0) + (1,0) = (2,0)$$

(5) $T: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b,\ c+d)$ é linear.

(VERIFIQUE)

(6) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ FIXA

Vamo definir $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$T(v) = (v)_B = (a_1, \dots, a_n) \quad \text{se } v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

T é linear pois se $u = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$, $(u \in V)$

$$v + u \doteq (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_n + b_n) v_n$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Logo } T(v+u) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ T(v) + T(u) = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \end{array}\right\} \Rightarrow T(v+u) = T(v) + T(u)$$

Se $a \in \mathbb{R}$, $av = (aa_1) v_1 + \dots + (aa_n) v_n$

$$T(av) = (aa_1, \dots, aa_n)$$

$$a\,T(v) = a(a_1, \dots, a_n)$$

Logo $T(av) = aT(v) \quad \forall a \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.

Seja agora $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$

$$S(a_1, \dots, a_n) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

Mostre que S também é linear.

Vale que $V \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n \xrightarrow{S} V$

$$S \circ T(v) = S(T(v)) = S(a_1, \ldots, a_n) = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = v$$

$$v \in V, \quad v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

$$T \circ S(a_1, \ldots, a_n) = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = (a_1, \ldots, a_n)$$

T é uma transformação linear e S também.

Uma é inversa da outra.

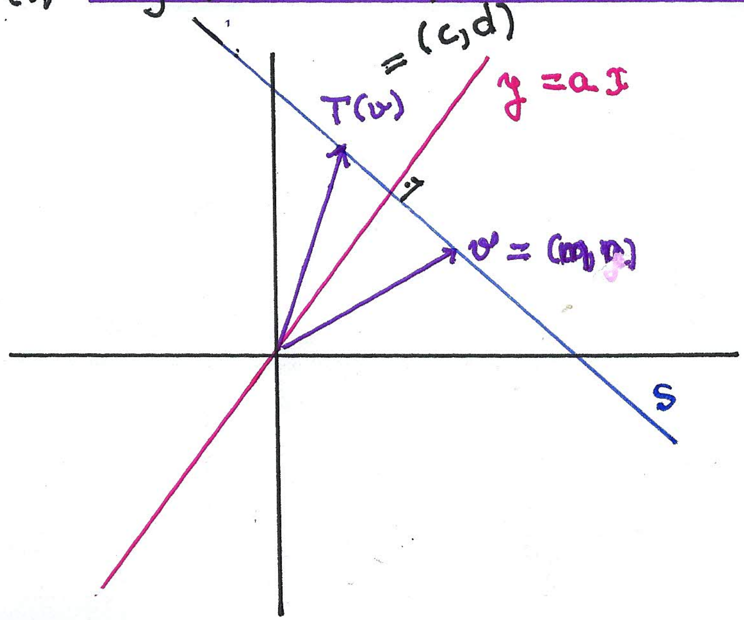
Dizemos que T é um ISOMORFISMO de V em $\mathbb{R}^n$.

(Isso quer dizer que um espaço vetorial de dimensão n e $\mathbb{R}^n$ têm a mesma "estrutura algébrica".

DOIS EXEMPLOS GEOMÉTRICOS

Exemplo:

(1) Reflexão em torno da reta $y = ax$, $a \neq 0$.



$v = (m, n)$

Calcular $T(v)$.

A reta s é perpendicular à reta $y = ax$.
Seu coeficiente angular é então $-1/a$.
A equação de s é então

$$y - n = -\frac{1}{a}(x - m).$$

A intersecção $M = r \cap s$ é o pto médio do segmento que une (m, n) a (c, d).

$$T(m, n) = (c, d)$$

Fazendo as contas temos que

$$M = \left(\frac{m + an}{1 + a^2}, \frac{a(m + an)}{1 + a^2} \right)$$

$$\boxed{\left(\frac{(1 - a^2)}{1 + a^2} m + \frac{2a}{1 + a^2} n, \frac{2a}{1 + a^2} m - \frac{1 - a^2}{1 + a^2} n \right) = T(m, n)}$$

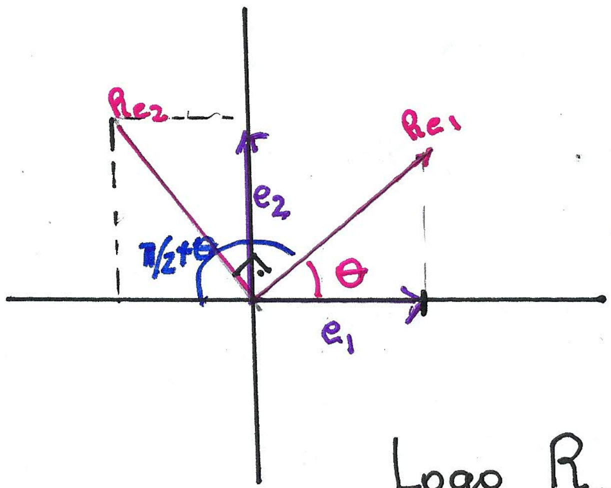
$$M = \left(\frac{c + m}{2}, \frac{d + n}{2} \right) \longrightarrow (c, d) = \left(2\left(\frac{m + an}{2}\right) - m, 2\left(\frac{(m + an)a}{1 + a^2}\right) - n \right)$$

$$(c, d) = T(m, n)$$

VERIFIQUE QUE T É LINEAR

Exemplo:

(2) Rotação de ângulo θ $= R_\theta$



$$R_\theta e_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

$$R_\theta e_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

Logo $R_\theta(x,y) = R_\theta(x e_1 + y e_2) = x\, R_\theta(e_1) + y\, R_\theta(e_2)$

$$= x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

$$= (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, \; x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$$

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, \; x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$$

VERIFIQUE QUE R_θ É LINEAR

MATRIZES

Já sabemos que $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com a soma de matrizes definida por $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$

$$A+B \overset{def}{=} (a_{ij}+b_{ij})$$

e a multiplicação por escalar é definida por

$$aA = (a\,a_{ij}).$$

Vamos agora definir o produto de 2 matrizes (quando possível).

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$

$1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n$ $1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p$

Então $AB \overset{\text{def}}{=} C \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$

$$C = (c_{ij})$$

onde $\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1+2+3 & 1\times 1 + 2\times 2 + 0\times 3 & 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 \\ 1\times 1 + 0\times 1 + 1\times 1 & 1\times 1 + 0\times 2 + 1\times 0 & 1\times 1 + 0\times 2 + 1\times 3 \end{bmatrix}}$$

Propriedades do Produto de Matrizes

(1) ASSOCIATIVA

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$

$$\underbrace{\underbrace{(AB)}_{M_{m\times p}(\mathbb{R})}\underset{M_{p\times q}(\mathbb{R})}{C}}_{M_{m\times q}(\mathbb{R})} = \underbrace{\underset{M_{m\times n}(\mathbb{R})}{A}\underbrace{(BC)}_{M_{n\times q}(\mathbb{R})}}_{M_{m\times q}(\mathbb{R})}$$

(2) DISTRIBUTIVA

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$

(1) $A(B+C) = AB + AC$

$B, C \in M_{q \times m}(\mathbb{R})$

(2) $(B+C)A = BA + CA$

(3) MATRIZ IDENTIDADE

$I_n \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}$

(é a matriz cujas linhas e colunas são os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$)

Vale que se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, então $I_m A = A$ e $A I_n = A$.

(4) Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$.

Então: $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

EXEMPLO IMPORTANTE

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Definimos $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$T_A(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$$

onde $\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{X}_{n\times 1} = \underbrace{Y}_{m\times 1}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

T_A é linear pois se

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ então $X + X' = \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{bmatrix}$

Então, pela propriedade distributiva temos

$$A(X + X') = AX + AX'$$

$A(X + X') = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$, $AX = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$, $AX' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix}$ $\Rightarrow (z_1, \dots, z_m) = (y_1, \dots, y_m) + (y'_1, \dots, y'_m)$

Logo $T_A(x_1+x'_1, ---, x_n+x'_n) = T_A(x_1, ---, x_n) + T_A(x'_1, ---, x'_n)$

Também vale que

$$T_A(a(x_1, ---, x_n)) = aT_A(x_1, ---, x_n) \quad \text{pois}$$

$$A\begin{bmatrix} a x_1 \\ \vdots \\ a x_n \end{bmatrix} = A(aX) = aAX = aY \quad (Y = AX)$$

Primeiras Propriedades de uma transformação linear

Sejam $(V_1, +_1, \cdot_1, 0_1)$ e $(V_2, +, \cdot, 0)$ espaços vetoriais e $T : V_1 \longrightarrow V_2$ transformação linear

P1: $T(0_1) = (0_2)$

$$0_1 = 0_1 + 0_1 \underset{T \text{ linear}}{\Longrightarrow} T(0_1) = T(0_1) + T(0_1)$$

Mas $T(0_1) = 0_2 + T(0_1)$.

Pela LCA $\Longrightarrow T(0_1) = 0_2$.

P2. $\forall \; v \in V_1$

$$T(-v) = -T(v)$$

$$T(-v) = T((-1)\cdot_1 v) = (-1)\cdot_2 T(v) = -T(v).$$

P3. $T(u - v) = T(u) - T(v)$

P4: $\forall \; v_1, ---, v_k \in V_1$ e $a_1, ---, a_k \in \mathbb{R}$ vale que

$$T(a_1 v_1 + --- + a_k v_k) = a_1 T(v_1) + --- + a_k T(v_k).$$

TEO: Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais. conjunto qualquer de vetores.

Seja $B_1 = \{v_1, ---, v_n\}$ uma base de V_1 e $C = \{u_1, ---, u_n\} \subset V_2$.

Então existe uma única transformação linear $T: V_1 \to V_2$ tal que $T(v_i) = u_i \quad \forall \; i = 1, ---, n$

Demonstração: existem únicos $a_1, ---, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $((v)_B = (a_1, ---, a_n))$

Seja $v \in V$. Então $v = a_1 v_1 + --- + a_n v_n$.

Definimos $T(v) = a_1 u_1 + --- + a_n u_n$.

Vale que T é linear, $T(v_i) = u_i \quad \forall \, i = 1, --, n$.

T é única

Se $T': V_1 \longrightarrow V_2$ é tal que $T'(v_i) = u_i \quad \forall \, i = 1, ---, n$

então $T'(v) = T(v) \quad \forall \, v \in V \Rightarrow T' = T$

Exemplo:

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$B = \{\underbrace{(1, 1, 0)}_{v_1}, \underbrace{(1, 2, 1)}_{v_2}, \underbrace{(1, 1, 1)}_{v_3}\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$u_1 = (1, 1, 0, 0), \; u_2 = (0, 1, 1, 0), \; u_3 = (0, 0, 1, 1)$

$v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$v = a v_1 + b v_2 + c v_3 = a(1,1,0) + b(1,2,1) + c(1,1,1)$

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ a + 2b + c = y \\ b + c = z \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow{L2-L1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow{L3-L2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y+x \end{array}\right]$$

Então $\left.\begin{array}{l} a + b + c = x \\ b = y - x \\ c = z - y + x \end{array}\right\} \Rightarrow a = x - b - c$

$$a = x - (y-x) - (z-y+x)$$
$$= x - \cancel{y} + \cancel{x} - z + \cancel{y} - \cancel{x}$$
$$= x - z$$

Logo $(x, y, z) = (x-z)v_1 + (y-x)v_2 + (z-y+x)v_3$

$$T(x,y,z) = (x-z)(1,1,0,0) + (y-x)(0,1,1,0) + (z-y+x)(0,0,1,1)$$
$$= (x-z,\ \cancel{x} - z + y - \cancel{x},\ \cancel{y} - \cancel{x} + z - \cancel{y} + \cancel{x},\ z - y + x)$$
$$= (x-z,\ y-z,\ z,\ x-y+z)$$

NÚCLEO E IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

$T: V_1 \longrightarrow V_2$ transformação linear

Núcleo de T = $\operatorname{Ker} T \overset{\text{def}}{=} \{ v \in V_1 \mid T(v) = 0_2 \} \subset V_1$

$\operatorname{Ker} T$ é um subespaço de V_1.

Imagem de T = $\operatorname{Im} T = \{ T(v) \in V_2 \mid v \in V_1 \}$

$= \{ u \in V_2 \mid \exists\, v \in V_1 \text{ com } u = T(v) \}$

imagem de T como função.

$\operatorname{Im} T$ é um subespaço de V_2.

$\operatorname{Ker} T$ é subespaço de V_1

- $0_1 \in \operatorname{Ker} T$ pois $T(0_1) = 0_2$
- Se $u, v \in \operatorname{Ker} T$ então $u + v \in \operatorname{Ker} T$

De fato: $T(u+v) \underset{T \text{ é linear}}{=} T(u) + T(v) \underbrace{= 0_2 + 0_2}_{\hookrightarrow u, v \in \operatorname{Ker} T} = 0_2$

– Se $a \in \mathbb{R}$, $v \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow av \in \operatorname{Ker} T$.

$$T(av) \underset{T \text{ é linear}}{=} aT(v) \underset{v \in \operatorname{Ker} T}{=} a \cdot 0_2 = 0_2$$

Im T é subespaço de V_2

– $0_2 \in \operatorname{Im} T$, pois $T(0_1) = 0_2$.

– Se $u_1, u_2 \in \operatorname{Im} T$, mostrar que $u_1 + u_2 \in \operatorname{Im} T$

$$\left.\begin{array}{ll} u_1 = T(v_1), & v_1 \in V \\ u_2 = T(v_2) & v_2 \in V \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 + u_2 = T(v_1) + T(v_2) \underset{T \text{ é linear}}{=} T(v_1 + v_2)$$

– Se $u \in \operatorname{Im} T$, mostrar que $au \in \operatorname{Im} T$.

$u \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \exists\, v \in V_1$ tq $u = T(v)$.

Então $au = aT(v) \underset{T \text{ é linear}}{=} T(av) \Rightarrow au \in \operatorname{Im} T$.

PROPOSIÇÃO: T é injetora se, e somente se, $\operatorname{Ker} T = \{0\}$

(Uma funçã $f: X \to Y$ é injetora se para $x_1, x_2 \in X$,

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.)

($\Rightarrow$) Suponha que T é injetora.

Se $T(v) = 0 = T(0) \underset{\text{definição de injetora}}{\Longrightarrow} v = 0$.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $\ker T = \{0\}$ e que $u, v \in V_1$ são tais que $T(u) = T(v)$.

Então: $T(u) = T(v) \iff T(u) - T(v) = 0 \iff$

$\underbrace{T(u-v) = 0}_{T \text{ linear}} \iff u - v \in \underbrace{\ker T = \{0\}}_{\text{hipótese}} \iff u - v = 0 \iff u = v$.

TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM

Seja V_1 um espaço vetorial de dimensão n e seja $T: V_1 \longrightarrow V_2$ uma transformação linear.

Então $\boxed{\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = n.}$

Demonstração:

Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ uma base de $\ker T$.

Pelo Teorema do Completamento, existem vetores

$v_{k+1}, \ldots, v_n \in V_1$ tais que

$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V_1.

Vamos mostrar que

$C = \{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$

- $[C] = \operatorname{Im} T$

Seja $u \in \operatorname{Im} T$. Então existe $v \in V$ tal que

$T(v) = u$. Mas $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$.

Então $u = \underbrace{a_1 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{T(v_1)}} + \cdots + a_k \underset{0}{\underset{\shortparallel}{T(v_k)}}}_{\text{pois } v_1, \ldots, v_k \in \operatorname{Ker} T} + \underbrace{a_{k+1} T(v_{k+1}) + \cdots + a_n T(v_n)}$

Logo u é CL de $T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)$.

- C é LI

Suponha que $b_{k+1} T(v_{k+1}) + \cdots + b_n T(v_n) = 0 \Rightarrow$

$T(b_{k+1} v_{k+1} + \cdots + b_n v_n) = 0 \Rightarrow$

$b_{k+1} v_{k+1} + \cdots + b_n v_n \in \operatorname{Ker} T$

Mas então,

$b_{k+1}v_{k+1} + \cdots + b_n v_n = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$ já que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base de Ker T.

Mas então $b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k - b_{k+1} v_{k+1} - \cdots - b_n v_n = 0$

$\Rightarrow b_1 = \cdots = b_k = b_{k+1} = \cdots = b_n = 0$ pois $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V_1.

$$\left.\begin{array}{l} \dim \operatorname{Ker} T = k \\ \dim \operatorname{Im} T = n-k \end{array}\right\} \Rightarrow n = \dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T.$$