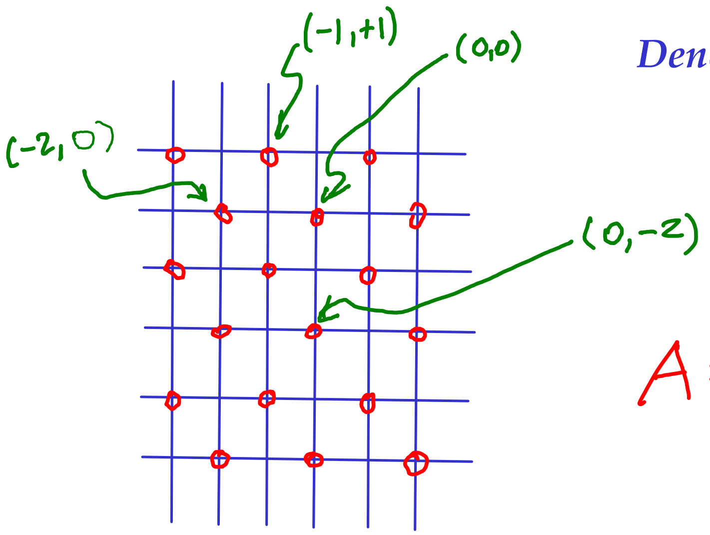
Modelo de Percolação.

A sequência de argumentos é razoavelmente longa. Mas cada passo envolve apenas resultados matemáticos compatíveis, creio eu, com o nível do nosso curso.

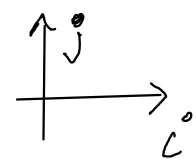
Obs: é provável que haja erros. Se houver, "foram propositais" e vocês devem identificá-los como atividade do curso...

Considere o "reticulado par" = conjunto de pares ordenados de números inteiros cuja soma é par.



Denotando este conjunto por A

$$A \subset \mathbb{Z}^2$$



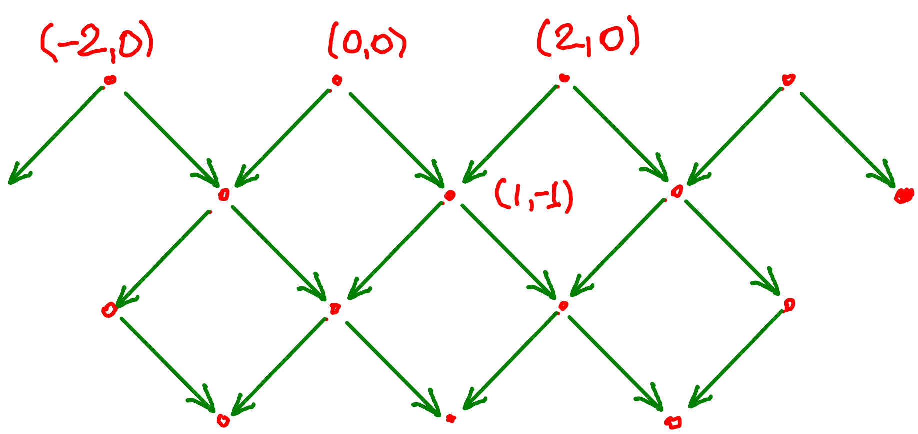
temos

$$A = \{ (i,j) : i+j = 2n ,\ n \in \mathbb{Z} \}$$

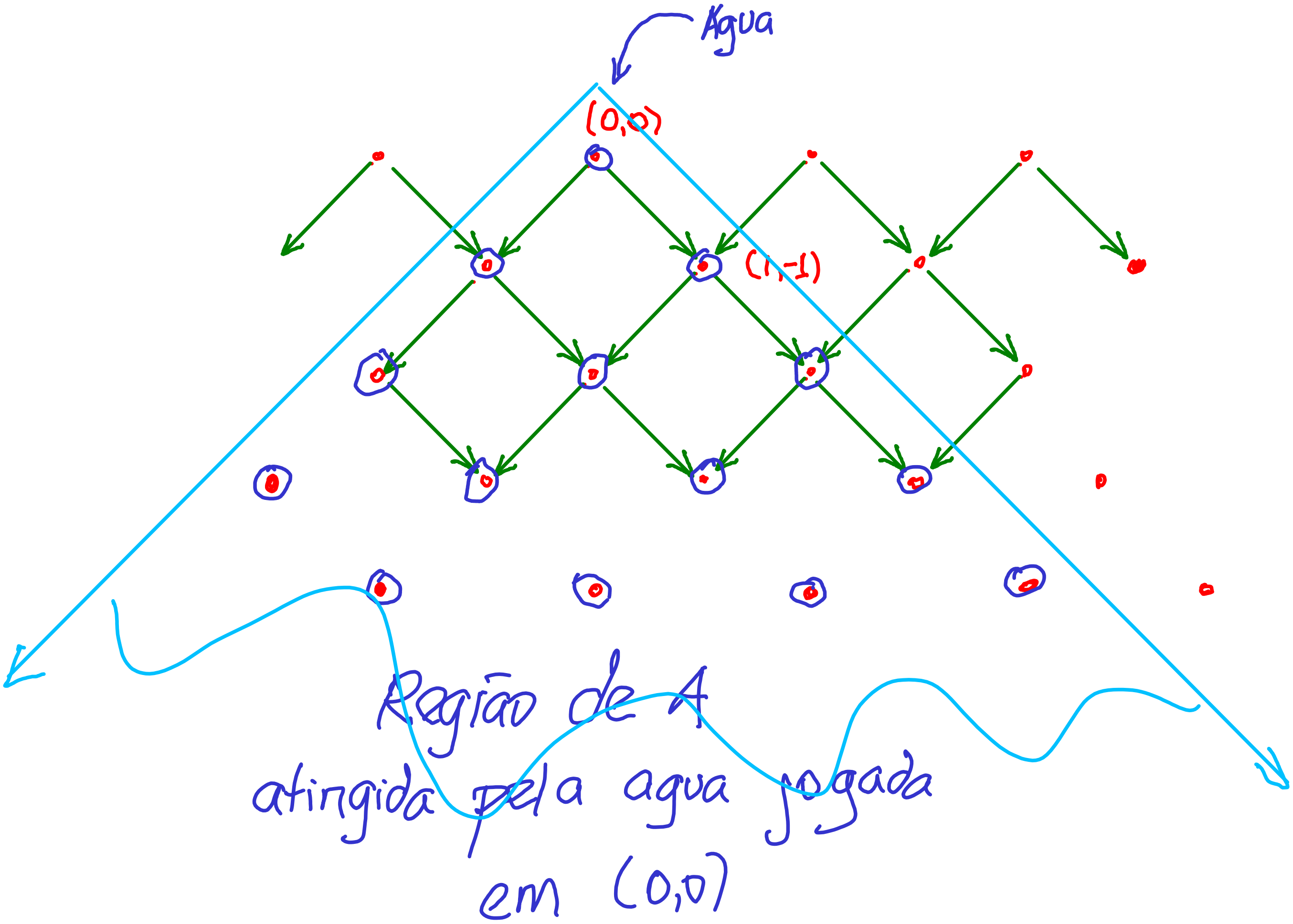
= "conjunto de vértices do grafo orientado"

Conjunto de arestas do grafo orientado"

Imagine que há "canos" ou "tubos" conectando pontos vizinhos deste conjunto de pontos, que permitem a passagem de líquido para baixo.



Se colocarmos água na posição (0 , 0), essa água iria fluindo para baixo, atingindo todos os infinitos pontos de A que podem ser atingidos através dos tubos.



Não há nada de interessante acontecendo pois o líquido pode fluir livremente para baixo. Mas num filtro de café ou numa rocha porosa temos bloqueios aleatórios que dificultam o fluxo (para baixo) do líquido.

Neste modelo simples colocamos essa aleatoriedade nos "sítios" (ou posições) de A = "reticulado par". Isto leva a uma versão conhecida como "Oriented Site Percolation".

Imaginemos que cada sítio de A tem "uma torneira", que pode estar aberta com probabilidade p ou fechada com probabilidade 1-p. Vamos assumir também que há independência entre o que acontece em posições distintas.

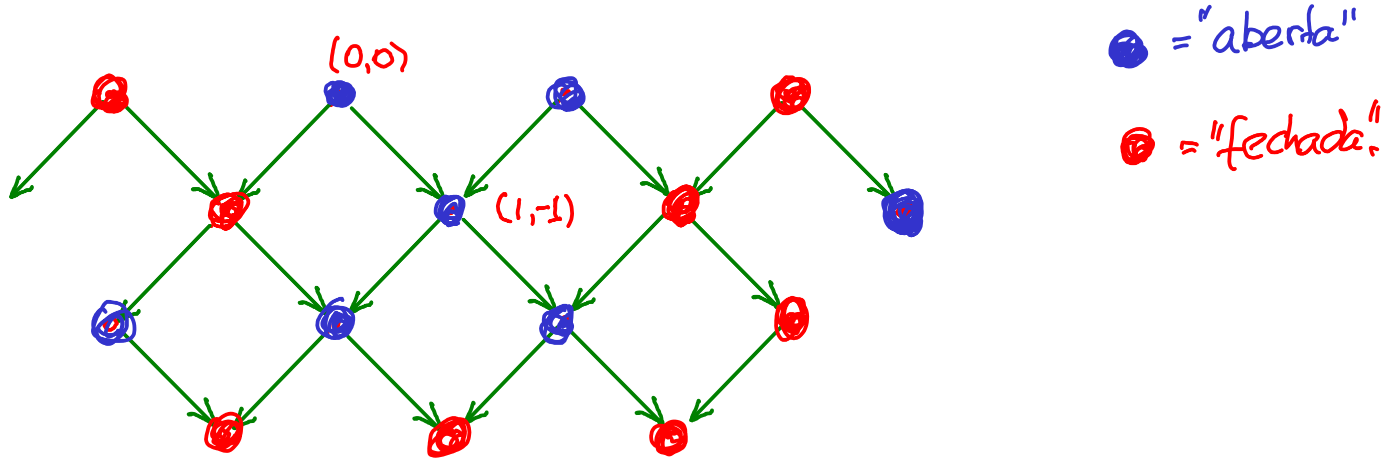
Associamos a cada sítio (i , j) $\in A$ *uma variável aleatória Bernoulli(p)*

$X_{(i,j)}$ com

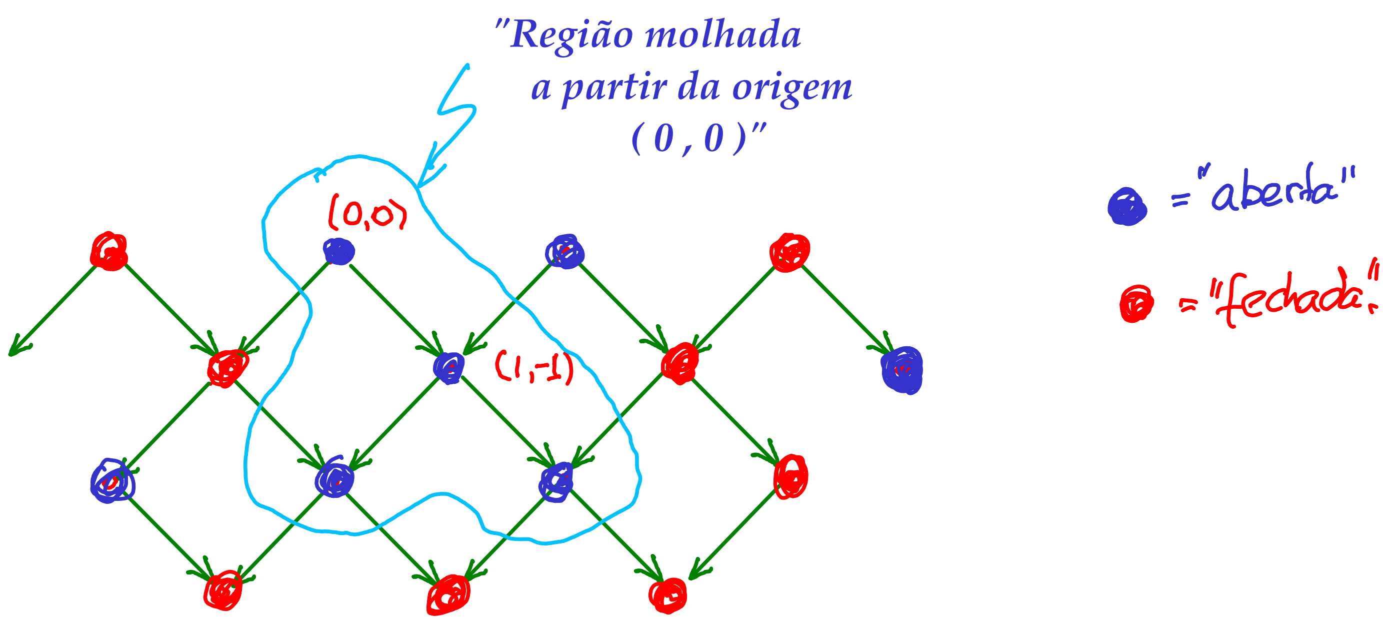
$$P(X_{(i,j)}=1) = p = 1 - P(X_{(i,j)}=0)$$

$\{X_{(i,j)}\}_{(i,j)\in A}$ v.a. i.i.d.

	Probabilidade
$X_{(i,j)} = 1 \iff$ torneira em (i,j) Aberta	p
$X_{(i,j)} = 0 \iff$ torneira em (i,j) Fechada	$1-p$



Dependendo da configuração das torneiras - quais estão abertas e quais estão fechadas - o líquido colocado na origem, posição (0 , 0) "molha" um subconjunto de A. Na figura acima



O que podemos dizer sobre o tamanho desta "região molhada a partir de (0,0)" ?

Em particular, podemos perguntar

Qual é a probabilidade dessa região molhada ter infinitos pontos?

Essa probabilidade certamente depende de p. Seja

$\rho(p)$ = "prob. da região molhada ter infinitos pontos quando o parâmetro da Bernoulli é p"

Como é o gráfico dessa função $\rho(p)$, para $0 \leq p \leq 1$?

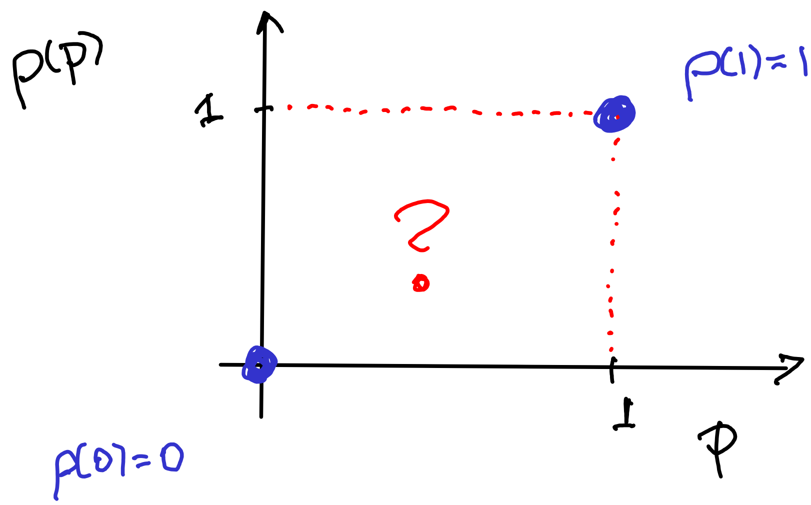
Claramente, para p=1, "todas as torneiras estão abertas", a região molhada vai ter infinitos pontos. Ou seja

$$\rho(1) = 1$$

Por outro lado, se p=0, "todas as torneiras estão fechadas", a região molhada é certamente finita e

$$\rho(0) = 0$$

Ainda temos pouca informação sobre esta função.



Mas o que acontece para p entre 0 e 1?

Qual é sua intuição?

1) Será que $\rho(p)=0$, *para todo* $0 \leq p < 1$?

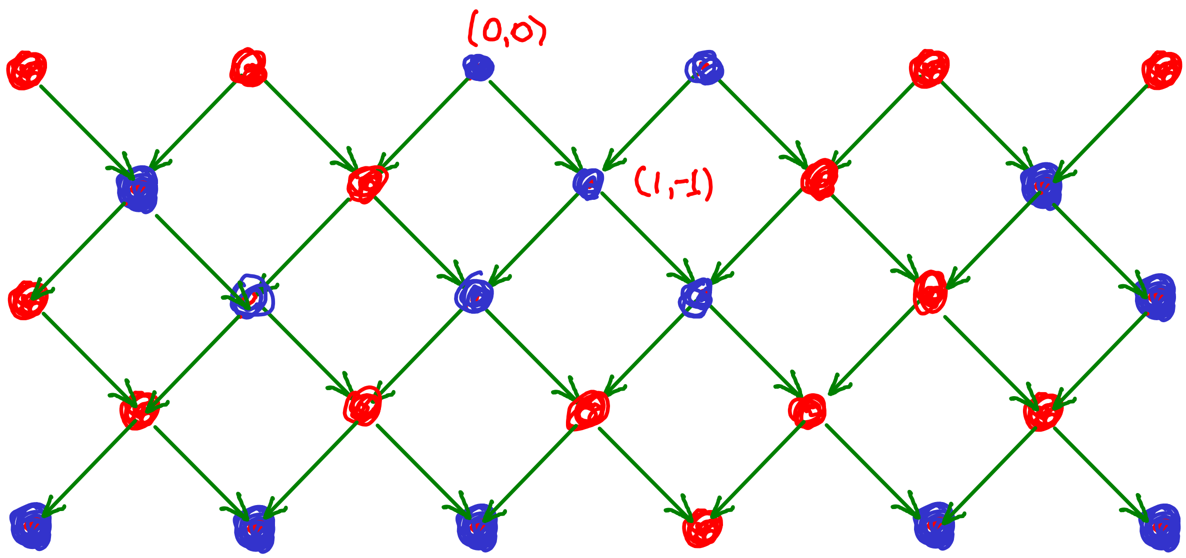
Ou seja, mesmo se p "for grande", mas a probabilidade de uma torneira estar fechada não for zero, a água será eventualmente "bloqueada" e a região molhada "com certeza" será finita.

2) Será que $\rho(p) > 0$, *para todo* $0 < p \leq 1$?

Ou seja, mesmo se p "for muito pequeno", teriamos certa probabilidade (que pode ser pequena, mas não é zero) de que a água "consiga se esgueirar" por entre as torneiras fechadas de tal forma que e a região molhada seja infinita.

3) Será que essa função é contínua?

Vamos aos resultados. Analogamente ao que falamos sobre o modelo de contato (veja as notas de aula) definimos o modelo de percolação usando a noção de "grafo orientado"



.

Vértices do grafo $A = \{(i,j) : i+j = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$

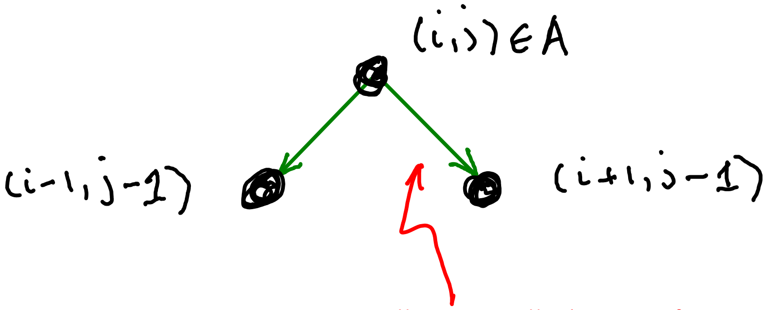
$A \subset \mathbb{Z}^2$ "reticulado par"

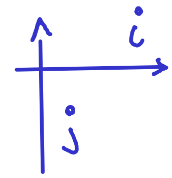
Conjunto de arestas ("edges")

E = "conjunto de flechas (pares ordenados) indicados na figura"

Mais precisamente, temos flechas da posição (i, j) em A para as posições

$(i+1, j-1)$ e $(i-1, j-1)$





"aresta" do grafo, indicada pelo par ordenado

$$\big((i,j) \,,\, (i+1, j-1) \big)$$

Por exemplo: A aresta, ou flecha, indicada por $\big((i,j) \,,\, (i+1, j-1) \big)$

significa que, se

1) a posição (i , j) "recebe água" e

2) tivermos $X_{(i,j)} = 1$, *ou seja*
"a torneira em (i , j) está aberta"

Então a água na posição (i , j) vai conseguir molhar a

posição (i+1 , j-1) se ela tambem estiver aberta.

Lembrando que $\{ X_{(i,j)} \}_{(i,j) \in A}$

são v.a. independentes e com a mesma distribuição Bernoulli (p).

Definição: *Sejam x e y duas posições (elementos de A).*

Dizemos que "existe um caminho aberto de x até y", denotado por

$$x \to y$$

se existir uma sequência de posições $x_0 = x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k = y,$

para algum k, tal que

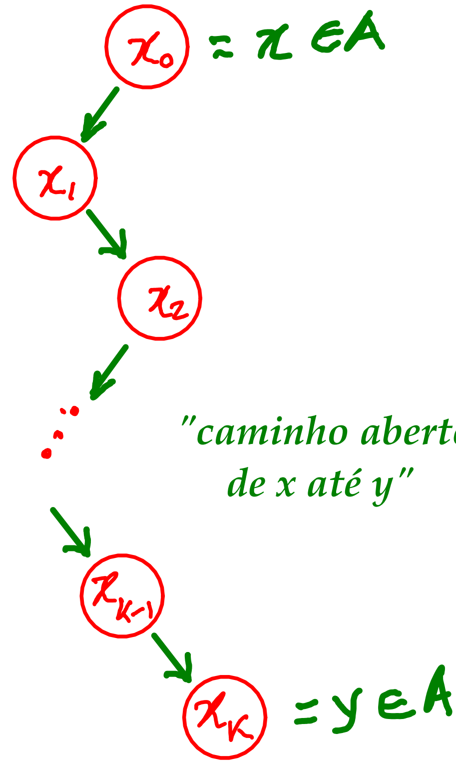
$(x_i, x_{i+1}) \in E$ *(conjunto de arestas)*

para $0 \leq i \leq k-1$

$e \quad X_{x_i} = 1$

para $0 \leq i \leq k$

(todas as torneiras da sequência de posições estão abertas)



Definição: *"região molhada pela origem", denotada por* C_0

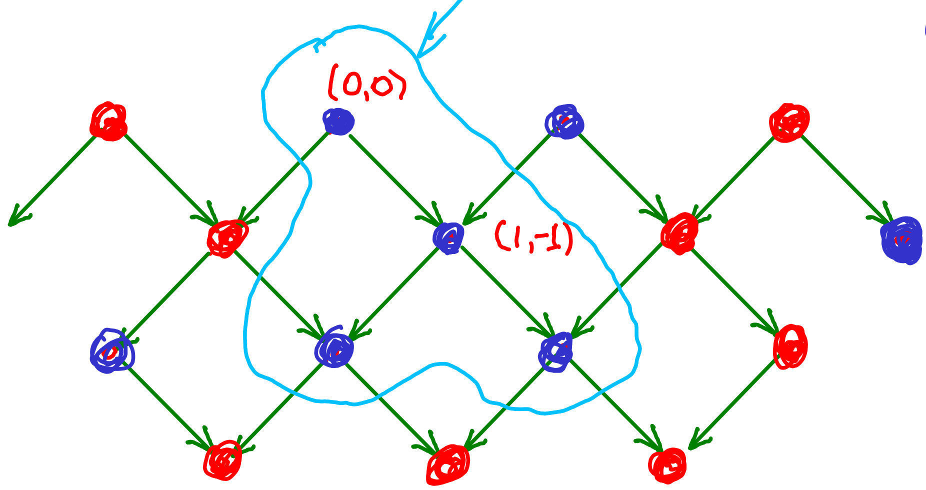
$$C_0 = \{ x \in A : (0,0) \to x \}$$

(posições de A que podem ser atigidas pela origem através de algum caminho aberto)

***Obs:** Note que essa região é aleatória, pois depende da configuração "aberta ou fechada" das torneiras.*

Exemplo:

$C_0 =$ *"Região molhada a partir da origem (0 , 0)"*



		Probabilidade
●	= "aberta"	p
●	= "fechada"	$1-p$

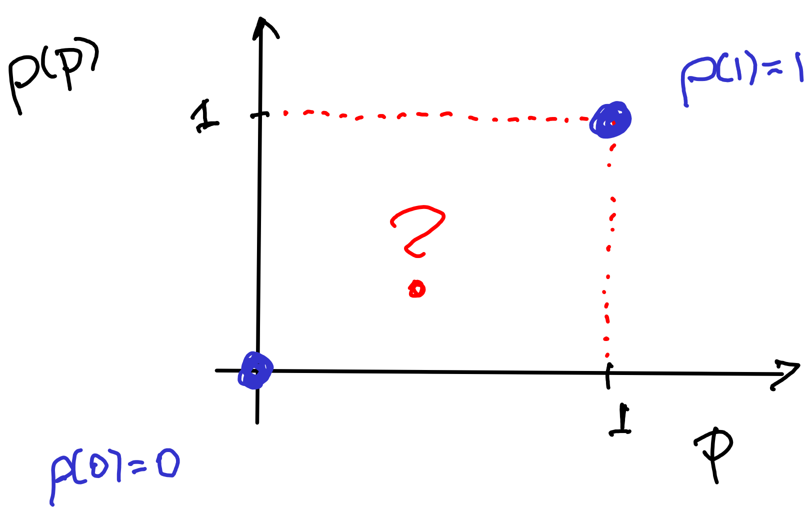
Qual é a probabilidade da região molhada pela origem ter infinitos pontos?

Denote por $\rho(p)$ *esta probabilidade:*

$$\rho(p) = P_p(|C_0| = \infty)$$

"cardinalidade de C_0"
"número de elementos de C_0"

Novamente: Como é o gráfico desta função de p?



Exercício: verifique que essa função é monótona não-decrescente em p, isto é, verifique que

se $p_1 \leq p_2$ então $\rho(p_1) \leq \rho(p_2)$

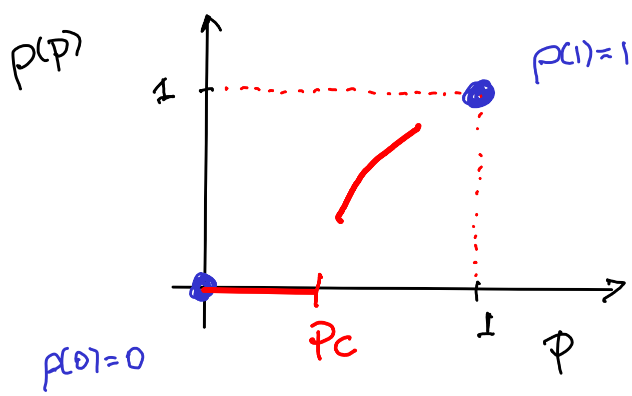
Sugestão: use acoplamento e um argumento como o que usamos na questão análoga para o modelo de contato.

Seja p_c a "probabilidade crítica", definida por

$$p_c = \sup\{p : \rho(p) = 0\} \qquad \begin{cases} p < p_c \Rightarrow \rho(p) = 0 \\ p > p_c \Rightarrow \rho(p) > 0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que este valor crítico é "não trivial" ou seja

$$\underbrace{0 < \overbrace{p_c < 1}^{\text{não é igual a 1}}}_{\text{não é igual a zero}}$$



Vamos começar mostrando que esse valor crítico não é zero.

Lema: $p_c > 1/2$

Demonstração. ***Comparamos a evolução da região molhada com um processo de ramificação (veja o capítulo IV do livro de Dobrow).***

Processo de ramificação:

Seja Y_n

o número de indivíduos na n-ésima geração de certo tipo de organismo. Assuma que o número de descendentes que cada indivíduo deixa para a próxima geração são variáveis aleatórias i.i.d com distribuição X (que só pode assumir valores inteiros não negativos). Então

$$Y_n = \sum_{i=1}^{Y_{n-1}} X_i^n$$

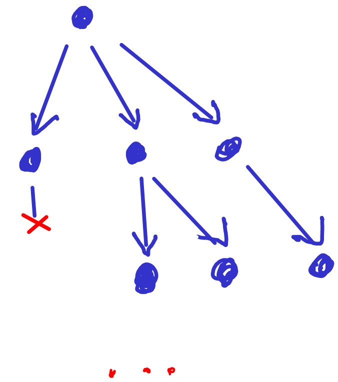
onde $\{X_i^n\}_{\substack{n\geq 1\\ i\geq 1}}$ são v.a. i.i.d. com a mesma distribuição (X)

Denote a média de X por μ

$$\mu = EX$$

Suponha $Y_0 = 1$, apenas um indivíduo na geração inicial

Geração $\qquad Y_n$ $\qquad$ (no exemplo)



0 $\qquad Y_0 = 1$

1 $\qquad Y_1 = \sum_{i=1}^{Y_1} X_i^1 = X_1^1 \qquad X_1^1 = 3$

2 $\qquad Y_2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \qquad \begin{cases} X_1^2 = 0 \\ X_2^2 = 2 \\ X_3^2 = 1 \end{cases}$

...

Exercício: Verifique que $\; E Y_n = \mu^n$

Considere os eventos E = "população eventualmente se extingue"

e, para cada $n \geq 1$, ***seja***

E_n = "população está extinta na geração n"

Exercício: Mostre que $\; E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$, $\quad E_n \subset E_{n+1}, \; \forall n \geq 1$ e

$$P(E) = \lim_{n \uparrow \infty} P(E_n)$$

Porquê?

Mas $\qquad P(E_n) = 1 - P(Y_n \geq 1) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(Y_n = k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} k P(Y_n = k)$

Exercício: Mostre que $\; \sum_{k=1}^{\infty} k P(Y_n = k) = E(Y_n)$

E encontramos $\quad P(E_n) = 1 - \mu^n \longrightarrow 1 \quad$ se $\mu < 1$

Ou seja, no processo de ramificação, o número médio de descendentes por organismo for menor que 1 a população vai se extinguir com certeza.

O que isso nos diz sobre o modelo de percolação?

Às posições de A, "reticulado par", tem dois indices: (i , j)

a primeira coordenada, i, indica a posição horizontal e
a segunda coordenada, j, indica a "profundidade" abaixo da origem (0,0)

Vamos pensar que o índice j indica a "geração" de uma população.
Suponha que a torneira nessa posição, a origem, esteja aberta, isto é, que

$$X_{(0,0)} = 1$$

Nessa "geração" zero vamos ter apenas um "organismo" na posição (0,0).

$$y_0 = 1$$

Na próxima geração, "geração 1", esse organismo vai deixar X_1^1 *descendentes, com*

$$X_1^1 = X_{(-1,-1)} + X_{(1,-1)}$$

De forma que o número de organismos na geração 1 será

$$y_1 = X_1^1$$

Quantos descententes deixam cada um desses organismos?

Se tivermos um organismo da "geração n", na posição (i, -n), com "torneira aberta"

$$X_{(i,-n)} = 1$$

Esse indivíduo vai deixar X_i^{n+1} *descendentes na próxima geração, onde*

$$X_i^{n+1} = X_{(i-1,-n-1)} + X_{(i+1,-n-1)}$$

$$\begin{array}{ccc} & (i,-n) & \\ \swarrow & & \searrow \\ (i-1,-n-1) & & (i+1,-n-1) \end{array}$$

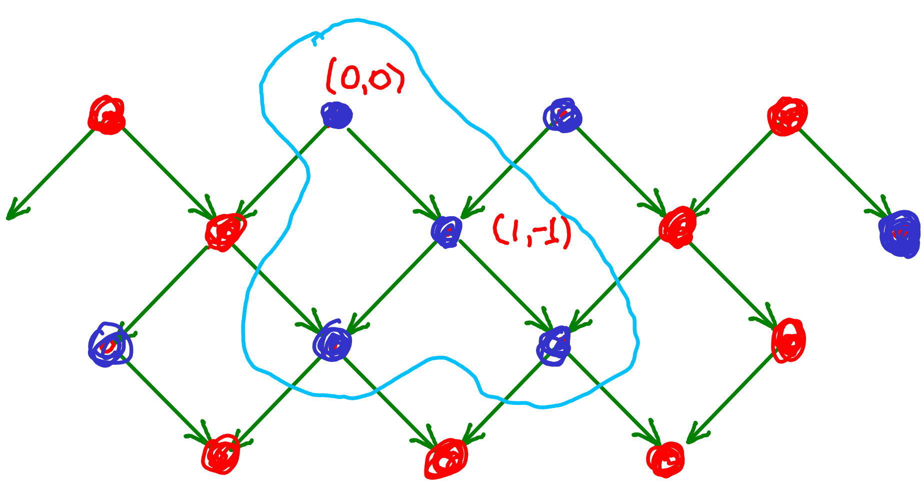
Note que $E(X_i^{n+1}) = 2p$ (porquê?)

Exercício: Defina

$$y_n = \sum_{\substack{\text{"todas as posições } i \\ \text{onde há um organismo} \\ \text{na geração } n\text{"}}} X_i^{n+1}$$

Exercício: Porquê esse NÃO é um processo de ramificação?

C_0



$y_1 = 1$

$y_2 = 1$

$y_3 = 2$

$y_4 = 0$

$\{y_n\}_{n\geq 1}$ é um processo de ramificação?

Apesar do "número de posições molhadas no nível n" do modelo de percolação não ser um processo de ramificação ele "cresce mais devagar" que um processo de ramificação com

$$X \sim Bin(2,p) \quad e \quad \mu = EX = 2p$$

"Portanto", se $\mu = 2p < 1$, ou seja, se $p < \frac{1}{2}$

o "tamanho da região molhada" vai ser finito, com probabilidade 1.

A conclusão é que $p_c \geq \frac{1}{2}$

e o Lema está "provado" $\square$

Exercício: Complete o argumento dessa comparação entre contato e ramificação. Sugestão: Use acoplamento entre o modelo de percolação e o processo de ramificação com

$$X \sim Bin(2,p)$$

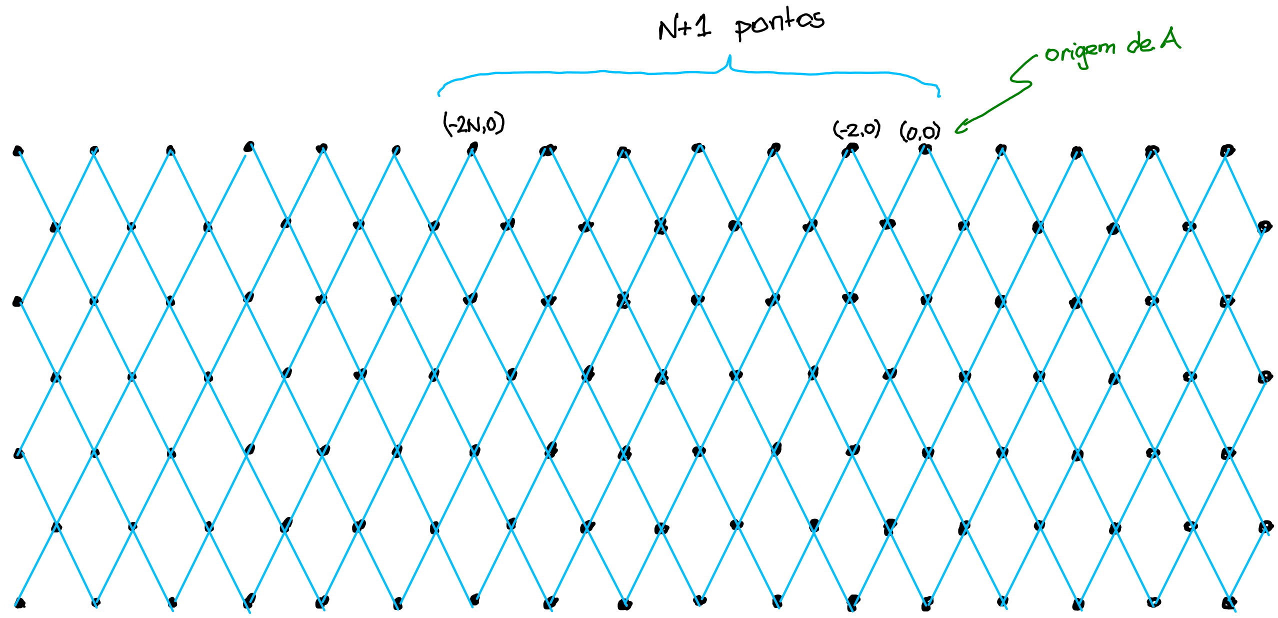
Agora mostramos que a probabilidade crítica não é igual a 1.

Lema: $p_c < 1$

Demonstração:

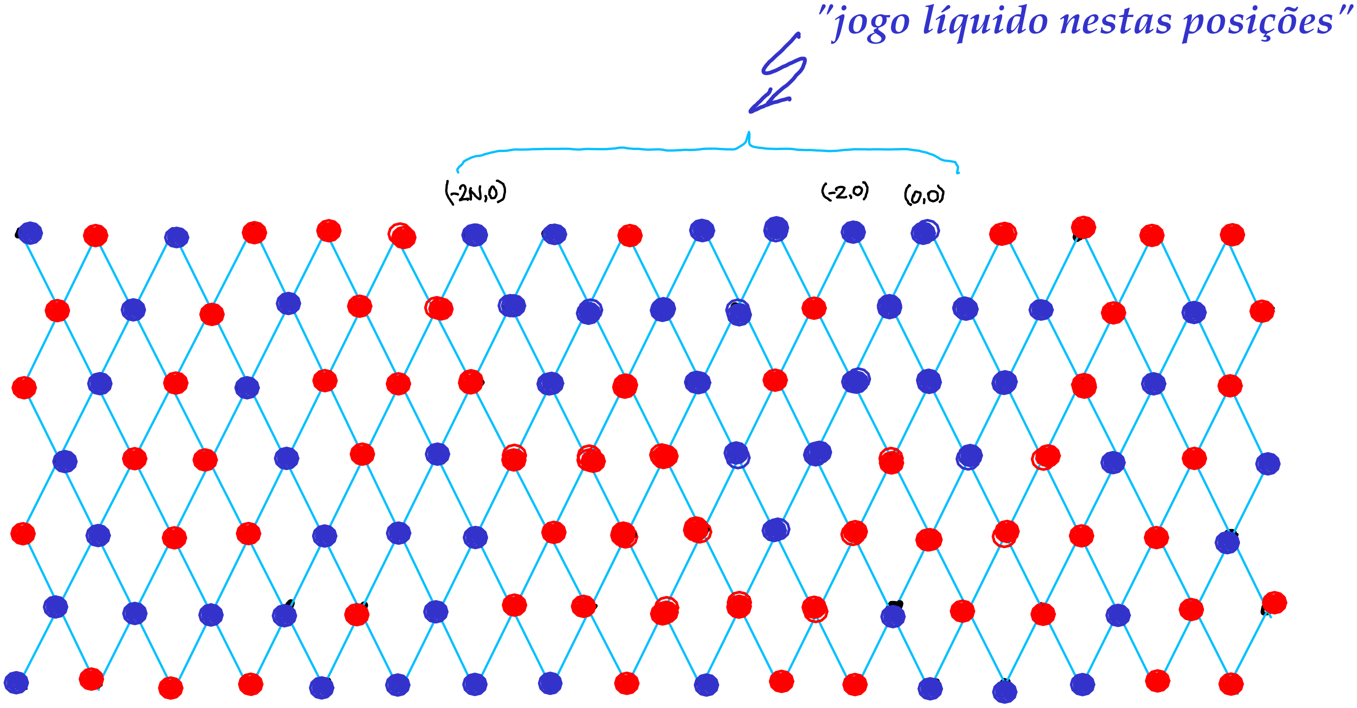
Começamos analizando o tamanho da região molhada por muitos pontos de A, não só a origem.

$$C_N = \bigcup_{i=0}^{N} \{ x \in A : (-2i, 0) \longrightarrow x \}$$

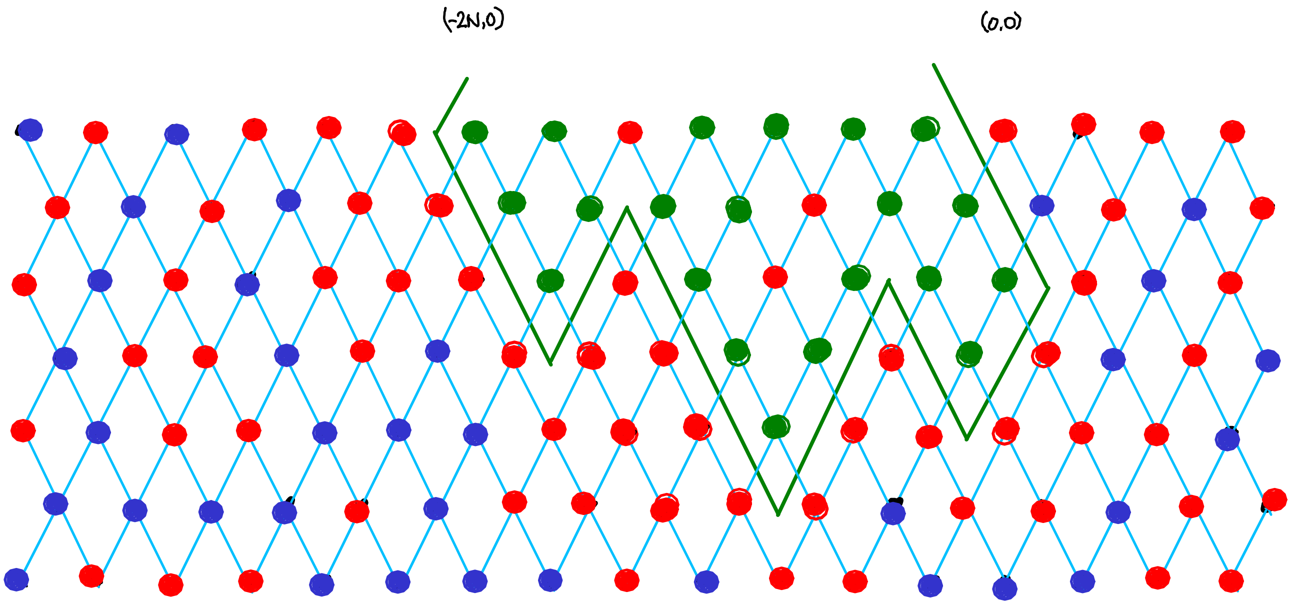


Colocando aleatoriedade: torneiras abertas ou fechadas.

Considerando as torneiras abertas (●) com probabilidade p ou fechadas (●) com probabilidade 1-p.

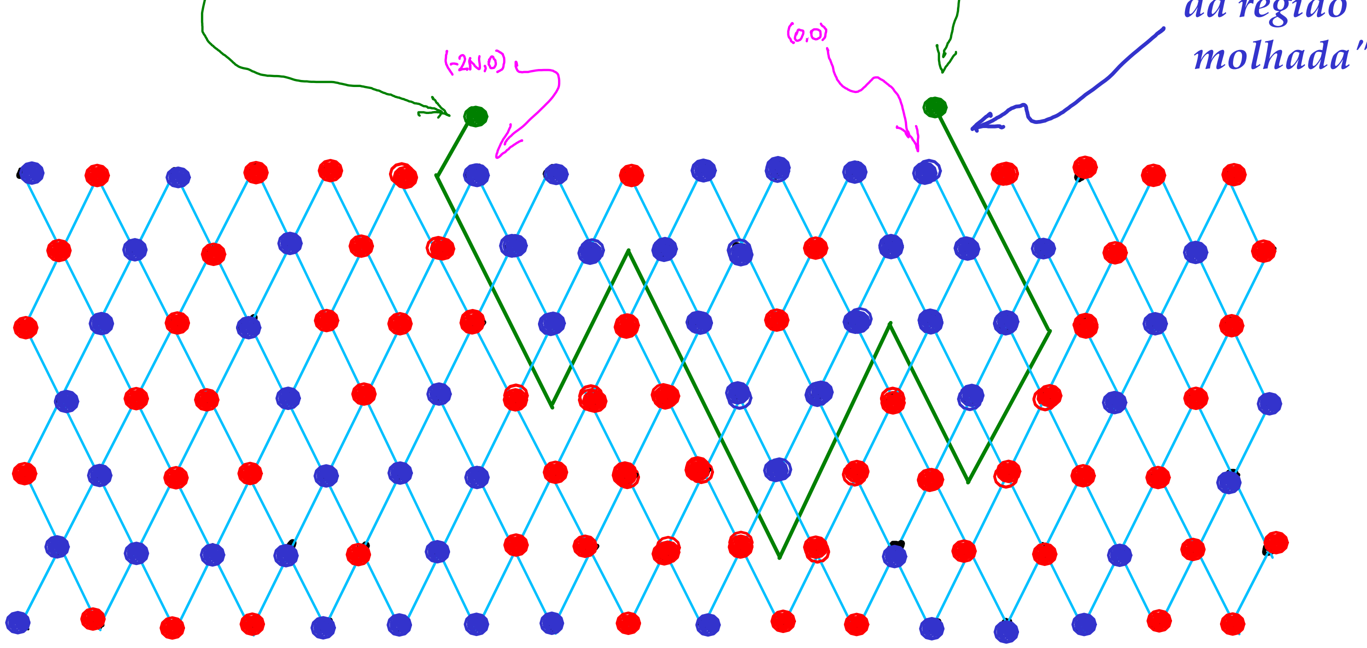


Região molhada: **(em verde)**



Para controlar o número de pontos da região molhada vamos considerar um contorno "ao redor" dessa região molhada.

Começando em (0,1) "vou contornando a região molhada até a posição (-2*N , 1)



Vamos ser mais precisos sobre o que significa:

*"Começando em (0,1) vou contornando a região molhada até a posição (-2*N , 1)"*

Note que a posição (0,1) não está no em A, o reticulado par. Esta posição está no seu complemento, no reticulado impar, que podemos denotar por B.

$$B = \mathbb{Z}^2 \cap A^c$$ *"reticulado impar"*

A partir dessa posição (0,1) "vou descendo, contornando a região molhada"

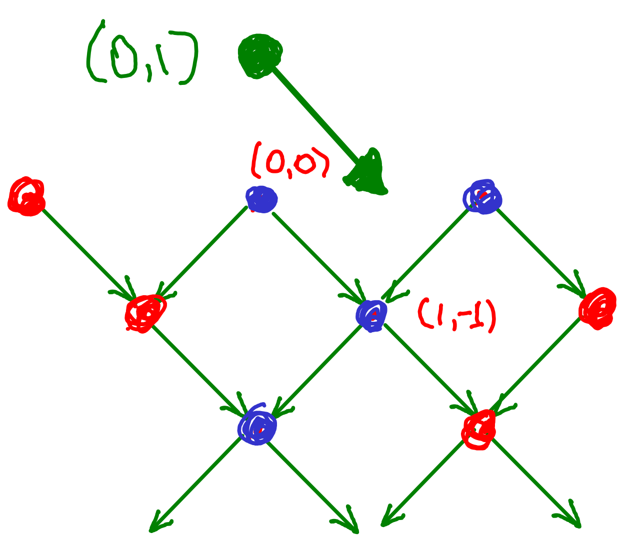
No primeiro passo tenho duas possibilidades dependendo do estado, aberto ou fechado, da torneira na origem (0,0)

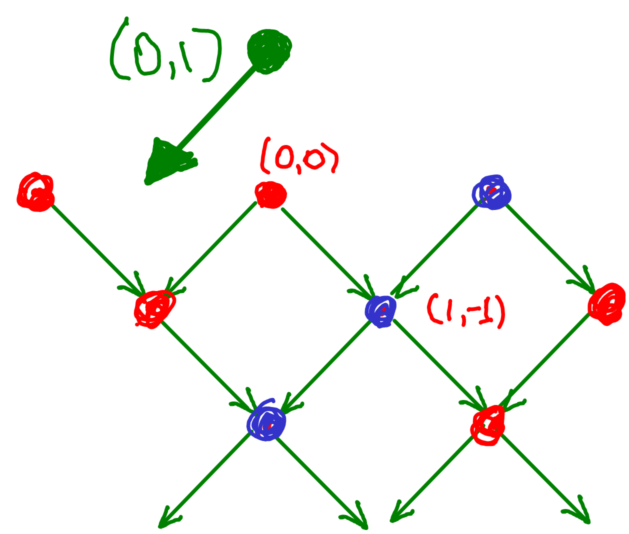
Torneira aberta

$$X_{(0,0)} = 1$$

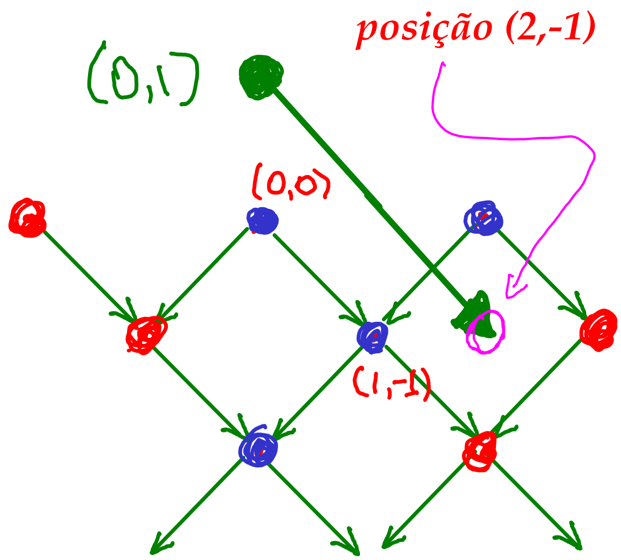
Torneira fechada

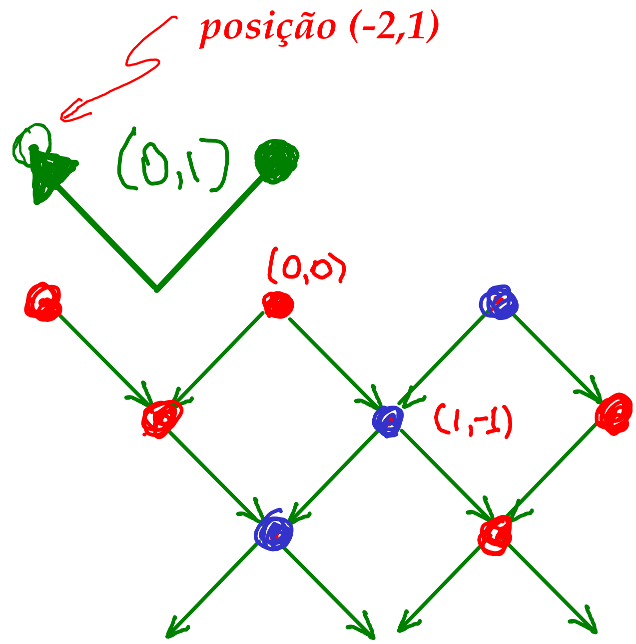
$$X_{(0,0)} = 0$$





O próximo caso, nas duas figuras acima, seriam





A região molhada pelos ponto de (0,0) até (-2*N,0) só pode ser grande se o compromento desse contorno for grande.
Em particular, o número de pontos molhados só pode ser infinito se o comprimento desse contorno também for infinito.

Examinando apenas o contorno, tenho pouca informação sobre a configuração "aberta ou fechada" das torneiras.

Mas tenho informação suficiente para mostrar que a probabilidade de encontrar um contorno com certo comprimento é menor ou igual a certo valor que decresce muito rapidamente com esse comprimento (vamos mostrar que decresce exponencialmente com o comprimento do contorno).

Definição: Um contorno de tamanho n, denotado por

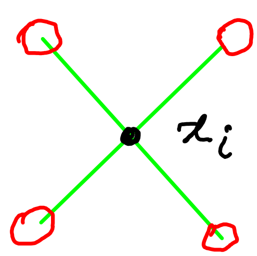
$$\gamma_n$$

(letra grega gama com subscrito indicando seu tamanho)

*é uma linha em B (reticulado impar) começando em (0,1) e terminando em (-2*N,1), ou seja, é uma sequência de posições em B*

$$x_0 = (0,1),\ x_2,\ \ldots,\ x_n = (-2N,1)$$

tal que x_i e x_{i+1} são vizinhos em B

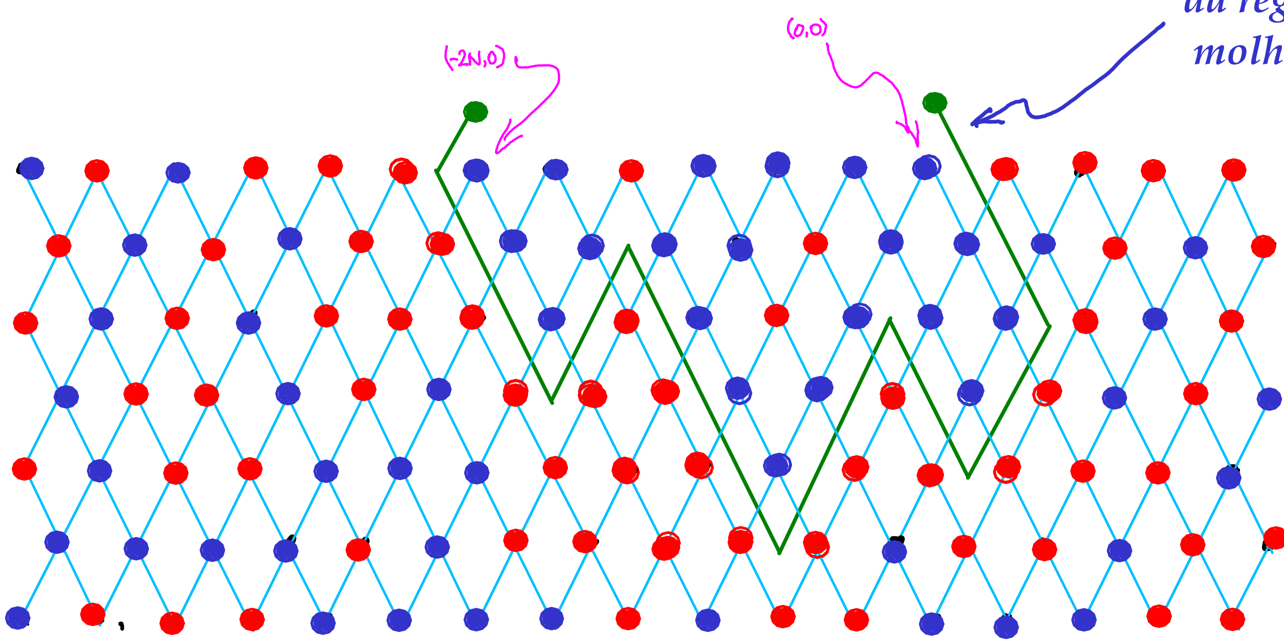


indica as posições possíveis para x_{i+1}

(posições em B que são vizinhas de x_i*)*

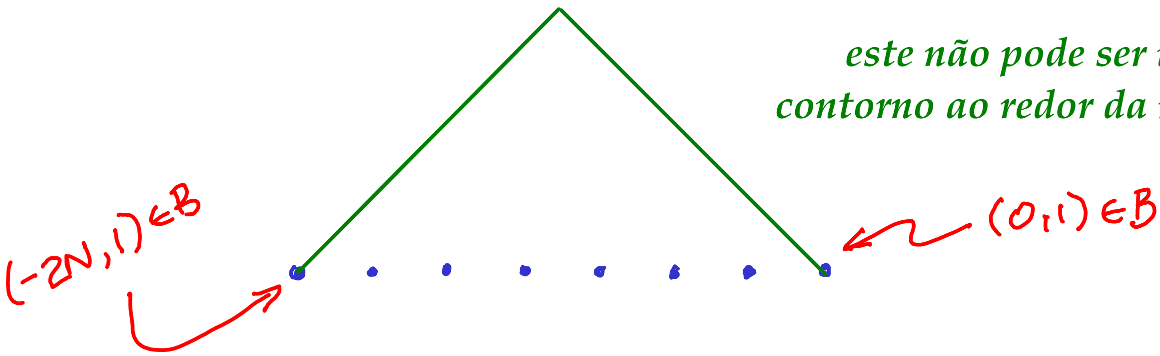
Já vimos acima um exemplo de contorno:

"contorno da região molhada"

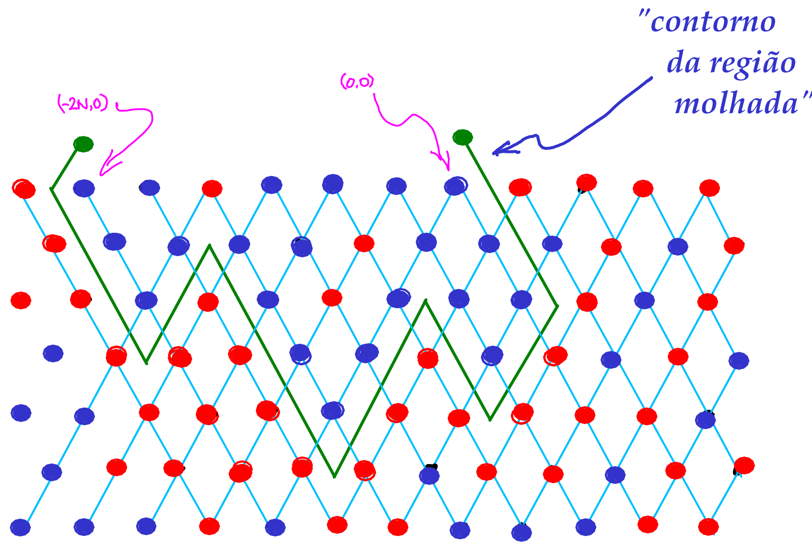


Obs: Não vai ser importante para o que segue, mas note que nem todo contorno pode ser "um contorno ao redor da região molhada". Um exemplo óbvio seria um "contorno que vai para cima" ou algo assim...

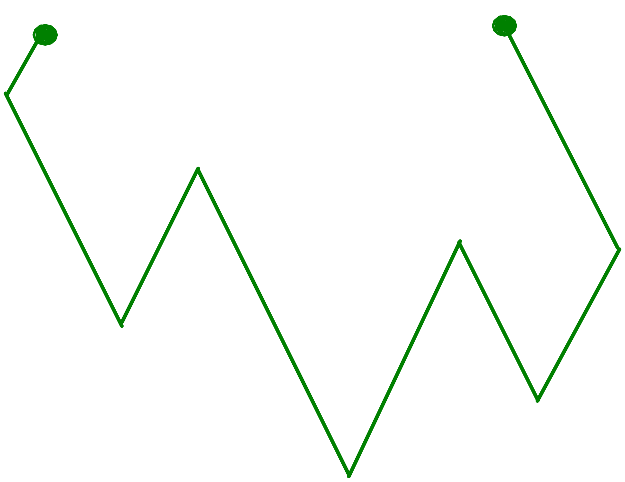
este não pode ser um contorno ao redor da região molhada



Voltemos ao exemplo concreto na página anterior.



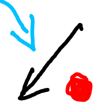
Se eu tenho só o contorno, o que sei sobre as torneiras que estão fechadas?



Que sei sobre as torneiras do modelo de percolação?

*Todo contorno vai de passo em passo desde (0,1) até (-2*N,1); o movimento de cada passo pode ser para SE (sudeste), SW (sudoeste), NW (noroeste) ou NE (nordeste).*

Verifique que, toda vez que encontro um contorno que dá um passo NW ou SW, sei que uma certa torneira TEM que estar fechada:

Passo SW  *esta posição em A tem que estar fechada!*

Passo NW  *esta posição em A tem que estar fechada!*

Ou seja, toda vez que observo um passo NW ou SW sei que aconteceu um evento com probabilidade 1-p numa certa posição.

Mas cuidado:

Posso estar "contando duas vezes" o fato de uma torneira está fechada, se acontecer:

esta posição em A tem que estar fechada!

Conclusão: A cada DOIS passos NW ou SW tenho certeza que PELO MENOS uma particular posição está fechada, um evento com probabilidade 1-p

Em seguida notamos que, como o contorno vai de (0,1) até (-2*N,1) ele tem que dar MAIS passos SW ou NW (que resultam em ir para a esquerda) que passos SE ou NE.

Conclusão: certamente pelo menos a metade dos passos de um contorno tem que ser SW ou NW.

Juntando estas duas conclusões:

Seja γ_n um contorno de tamanho n.

Se um contorno tem comprimento n sei que PELO MENOS a metade desses passos foram SW ou NW e como tambem sei que a cada dois passos SW ou NW tenho que ter um evento de probabilidade 1-p tenho

$$\underbrace{P(\gamma_n)}_{\text{probabilidade de observar esse particular contorno de tamanho n ao redor da região molhada}} \leq (1-p)^{n/4}$$

Exercício: verifique esta afirmação.

Com essa desigualdade sabemos que "contornos grandes são muito improváveis" para todo p < 1,
o que sugere que "o tamanho da região molhada" não seja grande nunca e o valor crítico de p seja 1...

Vamos ver se isso é verdade. Considere o evento

$$\{|C_N| < \infty\} = \text{"o número de posições molhadas é finito"}$$

Esse evento ocorre se e somente se existir algum contorno finito ao redor da região molhada.

$$P(|C_N| < \infty) = P(\underbrace{\text{"}\exists\, \gamma \text{ finito"}}_{\text{denota o evento:}})$$

"existe algum contorno γ finito"

Note que, como o reticulado plano tem infinitos pontos, há infinitos possíveis contornos. Mas o conjunto de todos os contornos possíveis é enumerável.

Posso enumerar o conjunto de contornos da seguinte forma: Primeiro enumero (por um critério qualquer que não importa) todos os contornos com o menor tamanho possível; em seguida enumero (também por um critério qualquer) todos os contornos com o próximo tamanho possível e assim por diante.

Notação: Se γ *é um contorno denote por* $|\gamma|$ *seu comprimento.*

e denote por $\{\gamma \text{ com } |\gamma| = n\}$

o conjunto de todos os contornos com tamanho n.

Então

$$P(\text{"}\exists\, \gamma \text{ finito"}) = P\left(\bigcup_n \{\gamma \text{ com } |\gamma| = n\}\right)$$

união de todos os possíveis tamanhos

Obs: você aprendeu em teoria de probabilidades que:

Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos quaisquer então

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n)$$

(essa condição é conhecida como σ- aditividade)

letra grega sigma

Que implica

$$P(\text{"}\exists\, \gamma \text{ finito"}) = P\left(\bigcup_n \{\gamma \text{ com } |\gamma| = n\}\right)$$

$$\leq \sum_n P(\{\gamma \text{ com } |\gamma| = n\})$$

Vimos acima que cada um dos contornos em $\{\gamma \text{ com } |\gamma| = n\}$

tem probabilidade pequena: é menor ou igual a $(1-p)^{n/4}$

Mas quantos contornos de tamanho n existem e precisam ser incluidos na soma?

Exercício: Mostre que

$$\underbrace{\left|\{\gamma \text{ com } |\gamma| = n\}\right|}_{\#\text{ de elementos no conjunto}} \leq 3^n$$

Essa estimativa (BASTANTE grosseira) do número de contornos com tamanho n permite terminar a demonstração do Lema.

$$P(\text{"}\exists \gamma \text{ finito"}) = P\left(\bigcup_n \{\gamma \text{ com } |\gamma| = n\} \right)$$

$$\leq \sum_n P(\{\gamma \text{ com } |\gamma| = n\})$$

$$\leq \sum_n 3^n (1-p)^{\frac{n}{4}}$$

$$= \sum_{n \geq N_{min}} \alpha^n \quad \text{com} \quad \alpha = \alpha(p) = 3(1-p)^{1/4}$$

menor tamanho possível
(Qual é o valor?)

Pergunta "óbvia": será que essa soma (série geométrica) é finita?

$$\sum_{n \geq N_{min}} \alpha^n < \infty \ ?$$

Obs: se a soma for infinita, todo nosso trabalho até agora foi inútil: só mostrou que certa a probabilidade é finita...

Tampouco ganhamos algo útil se essa soma for finita mas maior que 1.

Claro que, como α depende de p, o valor da soma geométrica também depende de p.

Verifique que, se $p > \frac{80}{81}$ *então* $\alpha < 1$

Se $\alpha < 1$, com $\alpha = 3(1-p)^{1/4}$ temos

$$\sum_{n \geq 0} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

Exercício: *Mostre que, se* $p > \frac{80}{81}$ *então existe um valor de N suficientemente grande tal que*

$$\sum_{n \geq N_{min}} \alpha^n < 1$$

$p > \frac{80}{81}$

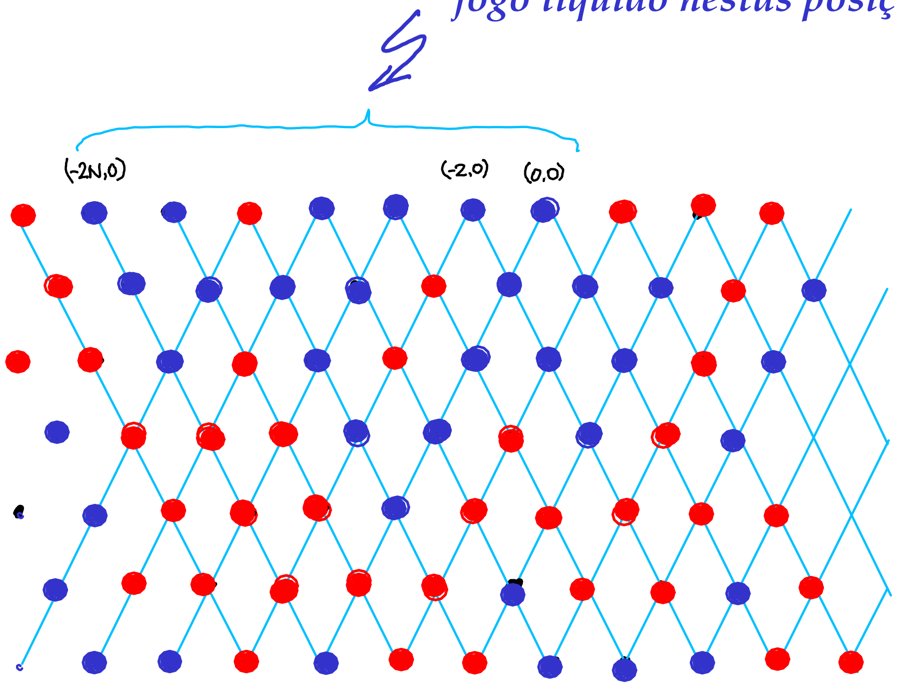
Em resumo, mostramos que, para p grande e N grande, temos

$$P(\overbrace{|C_N| < \infty}^{\text{"molha finitas posições de A"}}) = P(\text{"}\exists\ \gamma \text{ finito"}) < 1$$

$$\Rightarrow P(\underbrace{|C_N| = \infty}_{\text{"molha infinitas posições de A"}}) = 1 - P(|C_N| < \infty) > 0$$

*E mostramos que, se consideramos N suficientemente grande, e jogamos líquido nas posições de (-2*N,0), ... até (0,0)*

"jogo líquido nestas posições"



então, se $p > 80/81$, a probabilidade da região molhada ter infinitos pontos é maior que zero.

E se eu jogar líquido apenas na posição (0,0)?
Ainda temos probabilidade positiva de que a região molhada seja infinita?

Vamo mostrar que sim. O argumento envolve novamente

σ*- aditividade que já usamos acima.*

Suponha que, ao invés da origem (0,0), tivéssemos jogado o líquido em outra posição de A, digamos na posição (i,j).

Denote por $C_{(i,j)}$ *a região molhada quando jogo líquido nesta posição (i,j)*

$$C_{(i,j)} = \{ x \in A : (i,j) \to x \}$$

(posições de A que podem ser atigidas por (i,j) origem através de algum caminho aberto)

Exercício: Mostre que

$$\rho(p) = P(|C_0| = \infty) = P(|C_{(i,j)}| = \infty)$$

para toda a posição (i,j) em A.

Então temos

$$\underbrace{0 < P(|C_N| = \infty)}_{\text{já mostramos}} \underset{\sigma\text{- aditividade}}{\leq} (2N+1)\, P(|C_0| = \infty)$$

E portanto

$$P(|C_0| = \infty) > 0$$

se $p > \dfrac{80}{81}$

e o Lema está demonstrado.