MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Julho 2011

Equação de Laplace Bidimensional

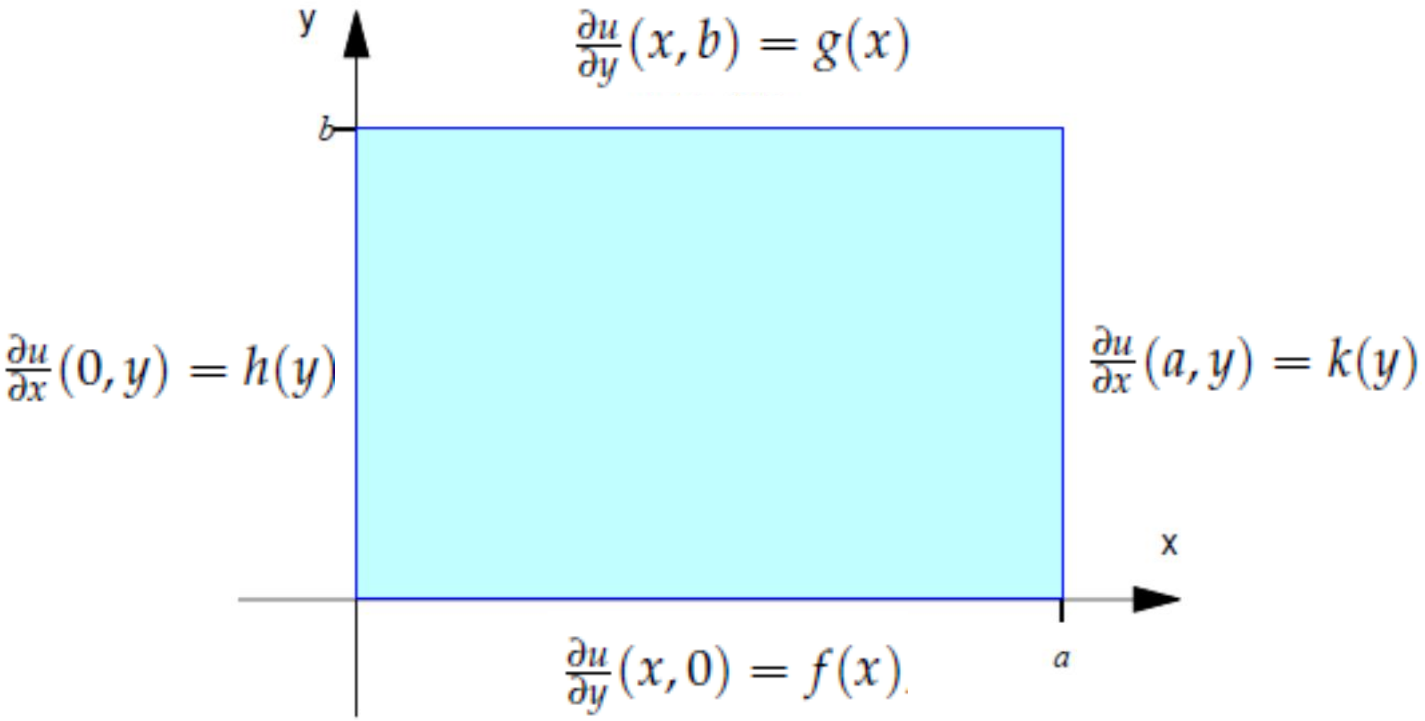


Figura 5.1 – Retângulo onde é resolvido o problema de [illegible] Neumann

Vamos considerar o problema de valor de contorno em um retângulo gerado pela equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Este problema é chamado **problema de Neuman**. A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas.

(a) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X'(0) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \ Y'(0) = 0, \ Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = c_1, \quad Y(y) = c_1 \cos \frac{n\pi y}{b}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X'(0) = 0$ tem solução

$$X(x) = c_2(e^{\frac{n\pi}{b}x} + e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{C}_2 \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi x}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} k(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} \right] \cos\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $k(y)$ com termo constante nulo. Assim pelo Corolário 2.4 na página 181 se as funções $k(y), k'(y)$ são contínuas por partes com média de $k(y)$ igual a zero, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos(\frac{n\pi y}{b}) dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $k(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b k(y) dy = 0$$

Coeficientes da série de cossenos de k(y) $\quad a_n = \frac{n\pi}{b} c_n \sinh\frac{n\pi a}{b}$

(b) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X'(a) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \ Y'(0) = 0, \ Y'(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = c_1, \quad Y(y) = c_1 \cos \frac{n\pi y}{b}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

A primeira equação diferencial com a condição $X'(a) = 0$ tem solução

$$X(x) = c_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} + e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{C}_2 \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = h(y)$, temos que ter

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} \right] \cos\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $h(y)$ com termo constante nulo. Assim pelo Corolário 2.4 na página 181 se as funções $h(y), h'(y)$ são contínuas por partes com média de $h(y)$ igual a zero, então os coeficientes são dados por

$$c_n \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos\frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

e para ter solução o primeiro coeficiente da série de cossenos de $h(y)$ tem que ser igual a zero,

$$\int_0^b h(y) dy = 0$$

Coeficientes da série de cossenos de h(y)

$$a_n = \frac{n\pi}{b} c_n \sinh\frac{n\pi a}{b}$$

(c) Por analogia escreva a solução dos problemas com somente $f(x)$ diferente de zero, com somente $g(x)$ diferente de zero e determine a solução do problema de Neuman no caso geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = h(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

(c)

$$u(x,y) = c_0 + u^{(f)}(x,y) + u^{(g)}(x,y) + u^{(h)}(x,y) + u^{(k)}(x,y),$$

em que

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a} \cosh\frac{n\pi(y-b)}{a}$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{a} \cosh\frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi(x-a)}{b}$$

$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi y}{b} \cosh\frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \frac{n\pi}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(g)} \frac{n\pi}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos(\frac{n\pi x}{a}) dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(h)} \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(k)} \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \cos(\frac{n\pi y}{b}) dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Coeficientes das séries de cossenos das funções que definem as condições de contorno

(d) Explique por que este problema não tem solução única.

(d) Por que uma constante somada a uma solução também é solução do problema.

(e) Explique por que o problema só tem solução se

$$\int_0^b k(y)dy = \int_0^b h(y)dy = \int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx = 0$$

(e) Pois para que tenha solução $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ tem que possuir uma série de cossenos com o termo constante igual a zero.

No caso do Problema de Neumann só é possível escrever a solução na forma de série de cossenos e cossenos hiperbólicos se as funções das condições de contorno tiverem média nula.

Caso essa condição não seja satisfeita esse método não funciona – outras opções devem ser investigadas

Problema (III):

(a) Encontre a solução para o problema de Neumann

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 \leq \mathrm{x} \leq 1,\ 0 \leq \mathrm{y} \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = q_f(1-2x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = q_g(1-2x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = q_h(1-2y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = q_k(1-2y)$$

Perceba que

$$\int_0^1 q_f(1-2x)dx = q_f(x-x^2)\Big|_0^1 = 0$$

e de forma análoga para os outros contornos, logo é possível construir solução usando séries de cossenos e cossenos hiperbólicos

Solução (III):

(a) Como as condições de contorno são lineares pode-se usar a tabela para as séries de cossenos de funções lineares

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f:[-L,L]\to\mathbb{R},\ -1\le c<d\le 1$	$a_n(f,L)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$	$b_n(f,L)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t)=\begin{cases}1, & \text{se } t\in[cL,dL]\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(0)},L)=d-c$ $a_n(f_{c,d}^{(0)},L)=\frac{1}{n\pi}\,\text{sen}\,s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)},L)=-\frac{1}{n\pi}\cos s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t)=\begin{cases}t, & \text{se } t\in[cL,dL]\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(1)},L)=\frac{L}{2}(d^2-c^2)$ $a_n(f_{c,d}^{(1)},L)=$ $\frac{L}{n^2\pi^2}(s\,\text{sen}\,s+\cos s)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(1)},L)=$ $\frac{L}{n^2\pi^2}(-s\cos s+\text{sen}\,s)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$

$$a_n = 2 * \left[q^{(o)} * \left(\frac{1}{n\pi} \sin s \Big|_0^{n\pi} \right) - 2q^{(o)} * \left(\frac{1}{n^2\pi^2} (s \sin s + \cos s) \Big|_0^{n\pi} \right) \right]$$

Solução (III):

$$a_n^1 = 2 * q^{(o)} * \left(\frac{1}{n\pi}\sin s|_0^{n\pi}\right) = \frac{2q^{(o)}}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0) = 0$$

$$a_n^2 = 2 * 2q^{(o)} * \left(\frac{1}{n^2\pi^2}(s\sin s + \cos s)\Big|_0^{n\pi}\right)$$

$$a_n^2 = 4q^{(o)} * \left(\frac{1}{n^2\pi^2}(n\pi\sin n\pi + \cos n\pi - 0\sin 0 - \cos 0)\right)$$

$$a_n^2 = 4q^{(o)} * \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\right)$$

Quando n é par o termo é nulo, considerando apenas os ímpares

$$a_n = -a_n^2 = \left(\frac{8q^{(o)}}{n^2\pi^2}\right)$$

Como $a = b = 1$, temos:

$$a_n = c_n \frac{n\pi}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b} = c_n \frac{n\pi}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a} = c_n n\pi \sinh n\pi$$

portanto

$$c_n = \frac{a_n}{n\pi \sinh n\pi}$$

Substituindo, o coeficientes da série de senos e ajustando a indexação para considerar apenas os termos não nulos.

$$c_k = \frac{8q^{(o)}}{(2k+1)^3\pi^3 \sinh(2k+1)\pi} \quad , k = 0,1,2 \cdots$$

A forma geral da solução é dada por:

$$u(x,y) = u^{(f)}\,(x,y) + u^{(g)}\,(x,y) + u^{(h)}\,(x,y) + u^{(k)}\,(x,y)$$

Onde:

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(f)} \cos(2k+1)\pi x \cdot \cosh(2k+1)\pi(1-y)$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(g)} \cos(2k+1)\pi x \cdot \cosh(2k+1)\pi y$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(h)} \cos(2k+1)\pi y \cdot \cosh(2k+1)\pi(1-x)$$

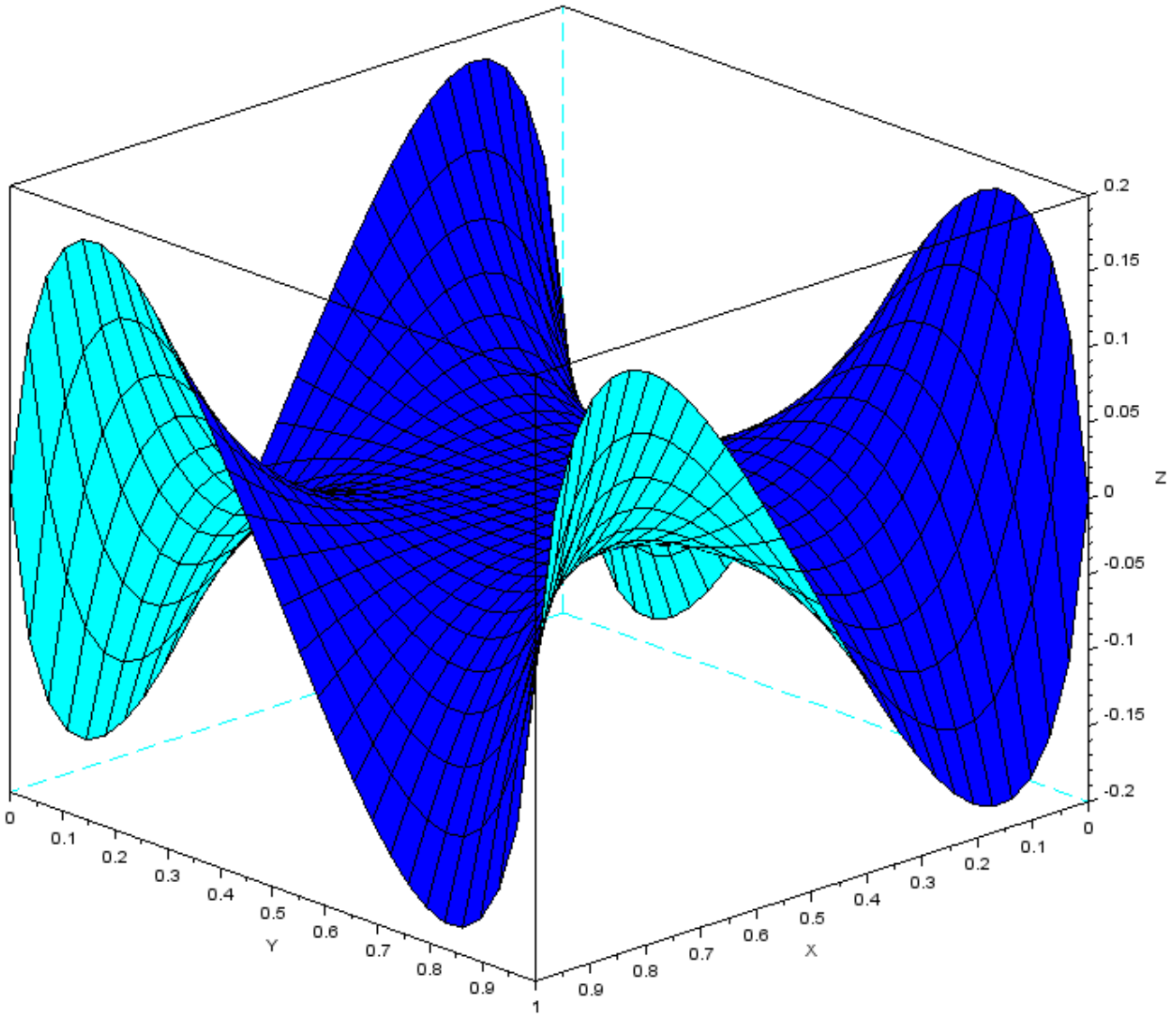
$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(k)} \cos(2k+1)\pi y \cdot \cosh(2k+1)\pi x$$

Os coeficientes são por:

$$c_k = \frac{8q^{(o)}}{(2k+1)^3\pi^3 \sinh(2k+1)\pi} \qquad , k = 0,1,2\cdots$$

(o)=(f),(g),(h) e (k) respectivamente

Saída gráfica



MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- **Introdução**
- **Séries de Fourier**
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- **Equação de Poisson (elíptica)**
- Equação da onda (hiperbólica)