

Questão 01

a) Consumidor

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

$$\text{st } c_t + k_{t+1} \leq (1-\tau) r_t k_t + \pi_t$$

$$V(k_t) = \max_t \{ u(c_t) + \beta V(k_{t+1}) : c_t + k_{t+1} \leq (1-\tau) r_t k_t + \pi_t \}$$

substituindo a k_0 : $V(k_t) = \max_t \{ u[(1-\tau) r_t k_t + \pi_t - k_{t+1}] + \beta V(k_{t+1}) \}$

$$\begin{cases} \text{Control } k_{t+1} \\ \text{Estado } k_t \end{cases}$$

$$[k] \quad \begin{aligned} u_{c_t}(-1) + \beta V'(k_{t+1}) &= 0 \\ u_{c_t} &= \beta V'(k_{t+1}) \end{aligned} \quad (1)$$

mas $u_{c_t} = \frac{1}{c_t}$, substituindo em (1)

$$\frac{1}{c_t} = \beta V'(k_{t+1}) \quad (2)$$

Teorema de Envelope e avançando um ② período.

$$[k_t] \quad u_{c,t}(1-\tau)r_t = V'(k_t)$$

avançando

$$V'(k_{t+1}) = u_{c,t+1}(1-\tau)r_{t+1} \quad (3)$$

substituindo ③ em ②.

$$\frac{1}{c_t} = \beta \frac{u_{c,t+1}(1-\tau)r_{t+1}}{c_{t+1}}$$

$$\underline{\text{Euler}} : \quad \left\| \frac{1}{c_t} = \beta \frac{(1-\tau)r_{t+1}}{c_{t+1}} \right\| \quad (4)$$

b) Firma

$$\max_{k_t} \quad A h_t^\alpha h_t^{1-\alpha} - r_t k_t$$

$$[h_t] \quad A \alpha h_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} = r_t$$

$$\underline{\underline{A \alpha \left(\frac{h_t}{k_t} \right)^{1-\alpha} = r_t}} \quad (5)$$

c) Equilíbrio e dada por

(i) Função valor $V(k_t)$

(ii) Regra de decisão do agente: $c(k)$ e $k^-(k)$

(iii) Regra de decisão do empresário: $k^d(k)$

(iv) Função preço, $r(k)$

(v) Lei de agregação, $w(k)$

↳ Dadas (iv) e (v), (ii) resolve o problema do família

↳ Dadas (iv), (iii) resolve o problema do empresário

↳ Equilíbrio / market clearing. $k = k^d(k)$

d) A partir dos produtividades marginais de cada insumo seu decrescente, porém acumulando nos dois insumos, temos retornos constantes de escala. O ponto crucial é que os insumos são acumuláveis. Note que a infraestrutura causa de acordo com o capital, ou seja, é um insumo que também causa ao longo do tempo, fazendo com que o modelo escape do armadilha dos retornos marginais decrescentes, desmontando no modelo de

e) De (4)

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(1-\tau)r - 1 + g$$

$$r = \frac{1+g}{(1-\tau)\beta} \quad (5)$$

De (5)

$$A\alpha \left(\frac{h}{k} \right)^{1-\alpha} = r$$

$$\left(\frac{k}{h} \right)^{\alpha-1} = \frac{r}{A\alpha}$$

$$\frac{k}{h} = \left(\frac{r}{A\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (6)$$

substituindo (6) em (7)

$$\frac{k}{h} = \left(\frac{1+g}{(1-\tau)\beta A\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (7)$$

De investimento de governo

$$h_{t+1} = \tau r_t h_t$$

$$h_t(1+g) = \tau r_t h_t$$

$$\frac{k}{h} = \frac{(1+g)}{\tau r}$$

$$\frac{k}{h} = \frac{(1+g)(1-\tau)\beta}{\tau(1+g)} = \left(\frac{1-\tau}{\tau} \right) \beta \quad (8)$$

⑨ rm ⑧

⑥

$$\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right) \beta = \left(\frac{1+g}{(1-\tau)} \beta A \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\left[\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right) \beta\right]^{\alpha-1} = \frac{1+g}{(1-\tau)} \beta A \alpha$$

$$1+g = \left[\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right) \beta\right]^{\alpha-1} (1-\tau) \beta A \alpha$$

$$\boxed{g = \frac{\left[\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right) \beta\right]^{\alpha}}{\tau^{\alpha-1}} \cdot A \alpha - 1} \quad \textcircled{10}$$

f) maximize

$$\frac{\partial g(\tau)}{\partial \tau} = 0$$

$$0 = \frac{(+A \alpha \beta^{\alpha} (1-\tau)^{\alpha+1} \alpha \tau^{\alpha-1} - (\alpha-1) \tau^{\alpha-2} \left[\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right) \beta\right]^{\alpha} A \alpha)}{\tau^{\alpha-1} \tau}$$

$$-A \alpha \beta^{\alpha} (1-\tau)^{\alpha+1} \alpha \tau^{\alpha-1} = (\alpha-1) \tau^{\alpha-2} \left[\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right) \beta\right]^{\alpha} A \alpha$$

$$-(1-\tau)^{-1} \alpha \tau = (\alpha-1)$$

$$\frac{-\tau}{1-\tau} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

$$-\tau \alpha = \alpha - 1 - \tau \alpha + \tau$$

$$\tau(-\alpha + \alpha - 1) = \alpha - 1$$

$$\boxed{\tau = 1 - \alpha}$$

note que

7

$$\frac{\partial (k/n)}{\partial \tau} = \beta \left[\frac{(2-1)(2) - (1)(2)}{\tau^2} \right]$$

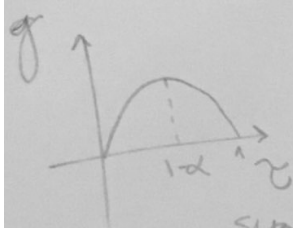
$$= -\frac{\beta}{\tau^2} < 0$$

$$\frac{\partial (g)}{\partial \tau} = \beta^\alpha A \alpha \left[\frac{-\alpha(1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha-1} - (\alpha-1) \tau^{\alpha-2} (1-\tau)^\alpha}{\tau^{(\alpha-1)2}} \right]$$

$$= \beta^\alpha A \alpha \left[\frac{(1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha-2} [-\alpha\tau - (\alpha-1)(1-\tau)]}{\tau^{(\alpha-1)2}} \right]$$

$$= \beta^\alpha A \alpha \left[\frac{(1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha-2} (-\alpha\tau - \alpha + \alpha\tau + 1 - \tau)}{\tau^{(\alpha-1)2}} \right]$$

$$= \beta^\alpha A \alpha \left[\frac{(1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha-2} (1-\alpha-\tau)}{\tau^{(\alpha-1)2}} \right]$$



$$\frac{\partial g}{\partial \tau} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 > \alpha + \tau \\ 1 - \alpha > \tau \end{matrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} < 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 < \alpha + \tau \\ 1 - \alpha < \tau \end{matrix}$$

Sup $\tau < 1 - \alpha$, a empresa irá demandar capital além do ótimo, mas a produção de infraestrutura não crescerá no mesmo ritmo, uma vez que apenas uma parte do capital se torna infraestrutura ($h_{t+1} = \tau r_t h_t$).
assim, a produção da empresa esborraça no restrição de recursos de infraestrutura, de modo que um aumento em τ provoca os recursos materiais a aumentarem a taxa de crescimento da economia.

for sua vez, uma alíquota muito alta (8)
($\tau > 1 - \alpha$) determinaria a via de capital pelo
empresa, mas a produção de infraestrutura
aumenta (relação $\frac{k}{n}$ cai). Uma queda no
imposto iria por mais capital para empresa
em detrimento de infraestrutura, que estaria
"sobrando", portanto menor crescimento

g) Aqui não substituímos a equação (9) de infra-estrutura. O governo escolherá diretamente o " h_{t+1} " e o " h_{t+1} " últimos.

$$\max_{c_t, h_{t+1}, h_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$$

su $c_t + h_{t+1} + h_{t+1} \leq A h_t^\alpha h_t^{1-\alpha}$

Função valor

$$V(k_t, h_t) = \max_{c_t, h_{t+1}, h_{t+1}} \left\{ \ln c_t + \beta V(h_{t+1}, h_{t+1}) : c_t + h_{t+1} + h_{t+1} \leq A h_t^\alpha h_t^{1-\alpha} \right\}$$

$$V(k_t, h_t) = \max_{c_t, h_{t+1}, h_{t+1}} \left\{ \ln(A h_t^\alpha h_t^{1-\alpha} - h_{t+1} - h_{t+1}) + \beta V(h_{t+1}, h_{t+1}) \right\}$$

$$[h_{t+1}] \quad u_{c_t}(-1) + \beta V_1(h_{t+1}, h_{t+1}) = 0 \quad (11)$$

$$[h_{t+1}] \quad u_{c_t}(-1) + \beta V_2(h_{t+1}, h_{t+1}) = 0 \quad (12)$$

Como $u_c = \frac{1}{c_t}$, em (11) e (12)

$$\frac{1}{c_t} = \beta V_1(h_{t+1}, h_{t+1}) \quad (13)$$

$$\frac{1}{c_t} = \beta V_2(h_{t+1}, h_{t+1}) \quad (14)$$

Teorema da Envelope e avançando um período (12)

$$[k_t] \quad u_{c,t} [A \alpha k_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha}] = V_1(k_t, h_t)$$

$$[h_t] \quad u_{c,t} [A h_t^{\alpha} (1-\alpha) k_t^{-\alpha}] = V_2(k_t, h_t)$$

Avançando...

$$u_{c,t+1} [A \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} h_{t+1}^{1-\alpha}] = V_1(k_{t+1}, h_{t+1}) \quad (15)$$
$$u_{c,t+1} [A h_{t+1}^{\alpha} (1-\alpha) k_{t+1}^{-\alpha}] = V_2(k_{t+1}, h_{t+1}) \quad (16)$$

substituindo (15) e (16) em (13) e (14)

$$\frac{1}{c_t} = \frac{A \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} h_{t+1}^{1-\alpha}}{c_{t+1}} \quad (17)$$

$$\frac{1}{q_t} = \frac{A h_{t+1}^{\alpha} (1-\alpha) k_{t+1}^{-\alpha}}{q_{t+1}} \quad (18)$$

h)

$$\frac{(17)}{(18)} \Rightarrow 1 = k_{t+1}^{-1} h_{t+1} \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$1 = \frac{h_{t+1}}{k_{t+1}} \cdot \frac{\alpha}{(1-\alpha)}$$

$$\frac{h_{t+1}}{k_{t+1}} = \frac{(1-\alpha)}{(\alpha)}$$

$$\boxed{\frac{k}{h} = \frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (19)$$

Substituir (19) em (17)

(18)

$$\frac{1}{c_t} = \beta \frac{A \alpha}{c_{t+1}} \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta A \alpha \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\alpha-1}$$

Como $\frac{c_{t+1}}{c_t} = 1+g$ no eq. balanceado

$$1+g = \beta A \alpha \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\alpha-1}$$

$$g = \beta A \alpha \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\alpha-1} - 1$$

$$\boxed{g = \beta A \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} - 1} \quad (20)$$

i) de (10) $g = \frac{[(1-\tau)\beta]^\alpha A \alpha}{\tau^{\alpha-1}} - 1$

Igualando as (20)

$$\frac{[(1-\tau)\beta]^\alpha A \alpha}{\tau^{\alpha-1}} = \beta A \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha}$$

$$\tau^{\alpha-1} = \frac{(1-\tau)^\alpha \beta^\alpha}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha}}$$

$$\frac{\tau^{\alpha-1}}{(1-\tau)^\alpha} = \frac{\beta^{\alpha-1}}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}}$$

$$= \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} \right]^{\alpha-1}$$

$$\tau^{1-\alpha}(1-\tau)^\alpha = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} \right]^{1-\alpha} \quad (20)$$

Logo passo comparar com a solução de item f:

$$f(\tau) = \tau^{1-\alpha}(1-\tau)^\alpha$$

ver como a função $f(\cdot)$ varia com τ , lembrando que $\left[\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} \right]^{1-\alpha} \geq 0$

$$\rightarrow f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f'(\tau) &= (1-\alpha)\tau^{-\alpha}(1-\tau)^\alpha + \tau^{1-\alpha}\alpha(1-\tau)^{\alpha-1}(-1) \\ &= (1-\alpha)\tau^{-\alpha}(1-\tau)^\alpha - \tau^{1-\alpha}\alpha(1-\tau)^{\alpha-1} \\ &= \tau^{-\alpha}(1-\tau)^{\alpha-1} [(1-\alpha)(1-\tau) - \tau\alpha] \\ &= \tau^{-\alpha}(1-\tau)^{\alpha-1} [1-\tau-\alpha+\tau\alpha-\tau\alpha] \\ &= \underbrace{\tau^{-\alpha}(1-\tau)^{\alpha-1}}_{>0} [1-\tau-\alpha] \end{aligned}$$

$$\rightarrow f''(\tau) = -\alpha \tau^{-\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} [1-\tau-\alpha] + \tau^{-\alpha} (1-\tau)^{\alpha-2} [1-\tau-\alpha] + \tau^{-\alpha} (1-\tau)^{\alpha-1} (-1)$$

$$= \tau^{-\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-2} \cdot$$

$$[-\alpha (1-\tau) (1-\tau-\alpha) + (1-\alpha) \tau (1-\tau-\alpha) + \tau (1-\tau) (-1)]$$

$$= \tau^{-\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-2} [1-\tau-\alpha] [\cancel{\tau^2 - \alpha + \tau - \alpha\tau} - \tau + \tau^2]$$

$$= \tau^{-\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-2} [(1-\tau-\alpha) (-\alpha + \tau^2) - \tau (1-\tau)]$$

$$= \tau^{-\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-2} [-\alpha + \tau^2 + \tau\alpha - \tau^3 + \alpha^2 - \alpha\tau^2 - \tau^2 + \tau^3]$$

$$= \tau^{-\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-2} [\tau(2\tau - \tau^2 - 1) - \alpha[\alpha + 1 + \tau^2]]$$

$$= \tau^{-\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-2} [-\tau(1 + \tau^2 - 2\tau) - \alpha[1 - \alpha + \tau^2]]$$

$$f' = 2\tau - 2$$

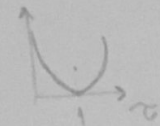
$$\tau = 1$$

$$f'' = 2 > 0$$

$$\Downarrow$$

$$1 - \alpha \geq 0$$

$$1 - \alpha + \tau^2 \geq 0$$

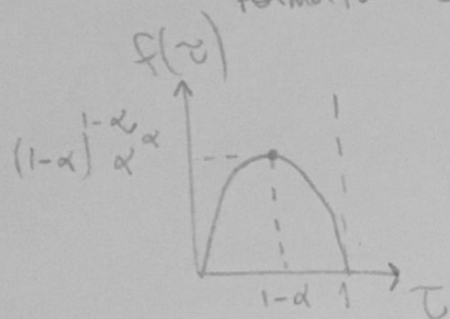


or say, $1 + \tau^2 - 2\tau \geq 0$

$$\underline{\underline{f''(\tau) < 0}}$$

ou seja, a solução de ótimo conseguirá
 ser implementado pelo problema desnormalizado
 a depender dos parâmetros β e α

Forma da $f(\tau) = \tau^{1-\alpha} (1-\tau)^\alpha$:

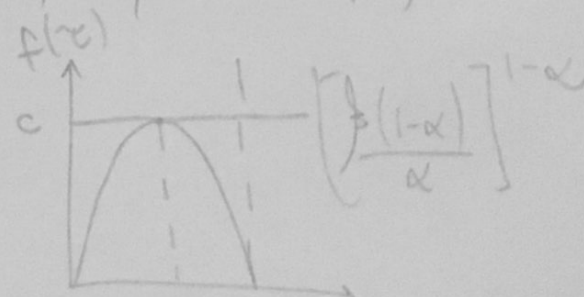


$$\rightarrow \text{seja } c = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} \right]^{1-\alpha}$$

Então temos uma solução

e quando $\tau = 1-\alpha$,

$f(\tau) = c$, ou seja,



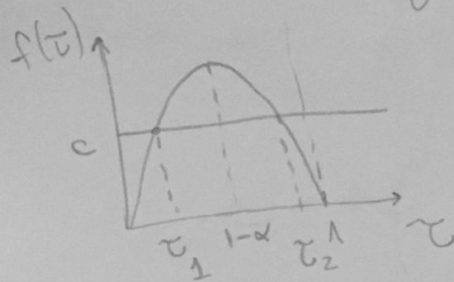
assum

$$f(1-\alpha) = (1-\alpha)^{1-\alpha} (\alpha)^\alpha = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} \right]^{1-\alpha}$$

(15)

$$1 = \frac{\beta^{1-\alpha}}{\alpha} \rightarrow \beta^{1-\alpha} = \alpha$$

→ Temos duas soluções se $c < (1-\alpha)^{1-\alpha} \alpha^\alpha$,
nesta caso a gráfica é dada por



duas soluções nos leva as g do problema
centralizado $\tau_1 < 1-\alpha$ e $\tau_2 > 1-\alpha$

→ O problema não tem solução se

$$c > (1-\alpha)^{1-\alpha} \alpha^\alpha$$

$$\left[\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} \right]^{1-\alpha} > (1-\alpha)^{1-\alpha} \alpha^\alpha \Rightarrow \beta^{1-\alpha} > \alpha$$

