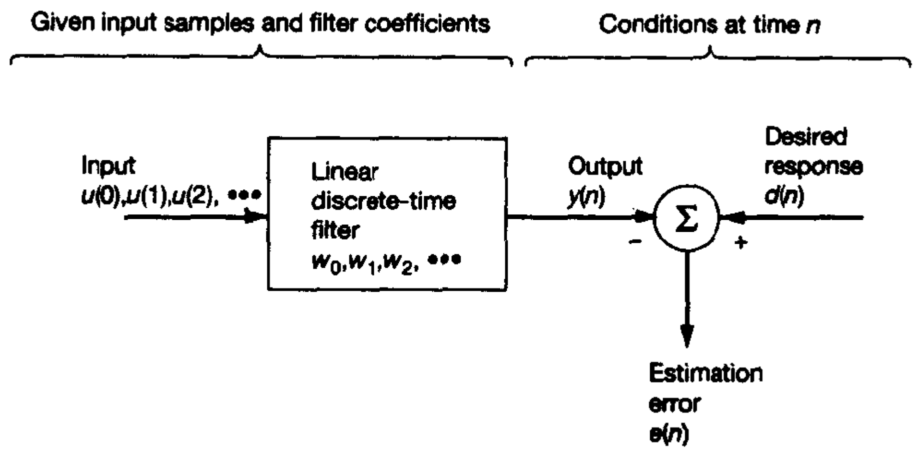
Filtros de Wiener

Introdução à Filtragem Linear Ótima

- Esta aula trata de uma classe de filtros lineares ótimos discretos no tempo conhecidos como Filtros de Wiener.
  - A teoria para um filtro de Wiener é formulada para o caso geral de séries temporais de valor complexo com o filtro especificado em termos de sua resposta impulsiva. A razão para o uso destas séries é que em muitas situações práticas (ex. comunicação, radar, sonar) o sinal de banda base de interesse aparece na forma complexa.
    - O termo banda base é usado para designar a banda de frequências do sinal original gerado pela fonte de informação.
    - Este estudo é iniciado pelo problema da filtragem linear ótima...

- Seja o filtro linear discreto no tempo:



Block diagram representation of the statistical filtering problem.

- A entrada consiste de uma série temporal u(0), u(1), u(2),..., e o filtro é caracterizado pela resposta impulsiva w_0, w_1, w_2, ...
- Em um tempo discreto n, o filtro produz uma saída denotada por y(n). Esta saída é usada para prover uma estimativa de uma resposta desejada que pode ser denotada por d(n).
- Com a entrada do filtro e a resposta desejada representando realizações simples de processos estocásticos, a estimação é acompanhada por um erro com características estatísticas próprias. Em particular, o erro estimado, denotado por e(n), é definido como sendo a diferença entre a resposta desejada d(n) e a saída do filtro y(n). O requisito básico é fazer o erro estimado e(n) o menor possível num sentido estatístico.

Introdução à Filtragem Linear Ótima

- Até aqui, duas restrições foram impostas ao filtro:
  - O filtro é linear, o que facilita sua análise matemática
  - O filtro opera num tempo discreto, o que torna possível sua implementação usando hardware/software digital.
- Entretanto, os detalhes finais da especificação do filtro dependem de duas outras escolhas a serem feitas:
  - Se a resposta impulsiva é de duração finita ou infinita
    - A escolha da duração finita (finite-duration impulse response, FIR) ou infinita (infinite-duration impulse response, IIR) é ditada por considerações práticas.
  - Qual o tipo de critério estatístico será usada para a otimização.
    - A escolha do critério estatístico para otimização do filtro é influenciada pela tratabilidade (acessabilidade) matemática.

Em resumo: Problema que se encontra em engenharia:

- ❖ Estimação de um sinal desejado [s(n)] a partir de um outro [x(n)] em que x(n) consiste do sinal desejado mais um sinal de ruído ou interferência v(n).

$$x(n) = s(n) + v(n)$$

- ➢ objetivo:

  projetar um filtro que minimiza a interferência aditiva e ao mesmo tempo preserva as características do sinal desejado.

❖ Filtros Clássicos:

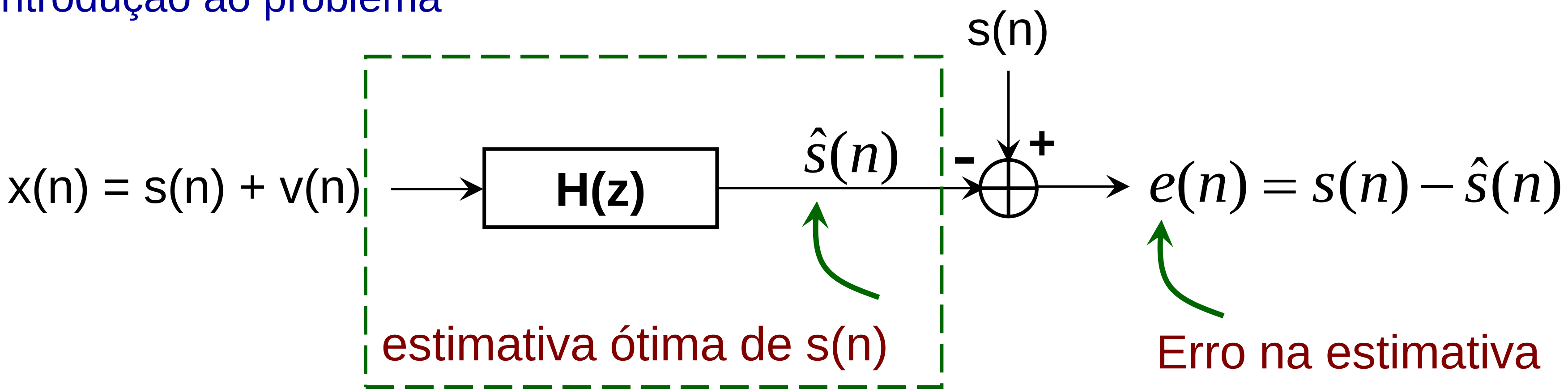
Os filtros passa baixas, etc., raramente restauram o sinal em algum sentido ótimo.

❖ Solução:

Filtros de Wiener ou então de Kalman.

Utilizam métodos dos mínimos quadrados

1. Introdução ao problema



- **Problema:**
  - Projeto de um filtro com resposta ao impulso h(n) que produz uma estimativa ótima de s(n).
- **Critério:**
  - O erro quadrático médio entre as amostras originais e as estimadas deve ser mínimo, isto é,

$$\varepsilon = E[\, e^2(n) \,]_{MIN}$$

  - Este critério tem a vantagem de ser simples na implementação e no tratamento matemático

2. Filtro de Wiener FIR

- Admitindo um filtro FIR com M coeficientes constantes, então:

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} h(l) z^{-l}$$

- Sendo x(n) o sinal de entrada, então o sinal estimado será dado pela soma convolução entre h(n) e x(n). Assim:

$$\hat{s}(n) = \sum_{l=0}^{M-1} h(l) x(n-l)$$

- Problema:
  - Encontrar os coeficientes *h(k) : k = 0, 1, ... M-1* tal que o erro quadrático médio seja mínimo, isto é:

$$\varepsilon = E\left[| e(n) |^2 \right] = E\left[| s(n) - \hat{s}(n) |^2 \right]_{MÍNIMO}$$

3. Cálculo dos h(k)

- Derivando ε em relação a $h^*(k)$ tem-se:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial h^*(k)} = \frac{\partial E\left[e(n)e^*(n)\right]}{\partial h^*(k)} = E\left[e(n)\frac{e^*(n)}{\partial h^*(k)}\right] = 0$$

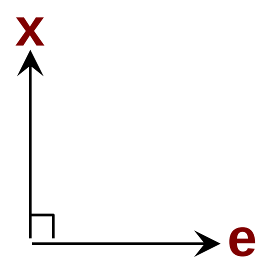
- Derivada do conjugado do erro:

$$\frac{\partial e^*(n)}{\partial h^*(k)} = \frac{\partial\left(s(n) - \hat{s}(n)\right)^*}{\partial h^*(k)} = x^*(n-k)$$

substituindo

- Para que o erro seja mínimo tem-se que:

$$E\left[e(n)\,x^*(n-k)\right] = 0 \quad : k = 0, 1, \cdots, M-1$$



  - Sinal de erro e de entrada devem ser ortogonais.
  - Princípio da ortogonalidade.

- como: $e(n) = s(n) - \hat{s}(n) = s(n) - \sum_{l=0}^{M-1} h(l)x(n-l)$

- substituindo na equação anterior: $E\left[e(n)\,x^{*}(n-k)\right] = 0$ **tem-se:**

$$E\left[\, s(n)x^{*}(n-k) - \sum_{l=0}^{M-1} h(l)x(n-l)x^{*}(n-k) \,\right] = 0$$

$$E\left[s(n)x^{*}(n-k)\right] - \sum_{l=0}^{M-1} h(l)E\left[x(n-l)x^{*}(n-k)\right] = 0$$

- portanto:

$$r_{sx}(k) = \sum_{l=0}^{M-1} h(l)r_{x}(k-l) \qquad : k = 0, 1, \cdots, M-1$$

Equações de Wiener-Hopf

- Na forma matricial: $\mathbf{R_x}.\mathbf{h} = \mathbf{r_{sx}}$

$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x(M-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(M-1) & r_x(M-2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix}$$

Matriz de Toeplitz (hermitiana)

$\mathbf{x^H = [X^T]^*}$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(m-1) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r_{sx}} = \begin{bmatrix} r_{sx}(0) \\ r_{sx}(1) \\ \vdots \\ r_{sx}(m-1) \end{bmatrix}$$

- Erro mínimo:

$$\varepsilon_{MIN} = r_s(n) - \sum_{l=0}^{M-1} h(l) r_{sx}^*(l)$$

4. Aplicação prática

- Em muitas aplicações sinal e ruído são admitidos descorrelacionados.

$$x(n) = s(n) + v(n) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} r_{sx}(k) = r_s(k) \\ \mathbf{R_x} = \mathbf{R_s} + \mathbf{R_v} \end{array} \right.$$

- e as equações de Wiener-Hopf se tornam:

$$[\mathbf{R_s} + \mathbf{R_v}]\mathbf{h} = \mathbf{r_s}$$

- Solução das equações

$$\mathbf{R_x}.\mathbf{h} = \mathbf{r_{sx}} \longrightarrow$$

R_x Matriz de Toeplitz (hermitiana)

$x^H = [X^T]^*$

Algoritmos de Levinson
e de Cholesky

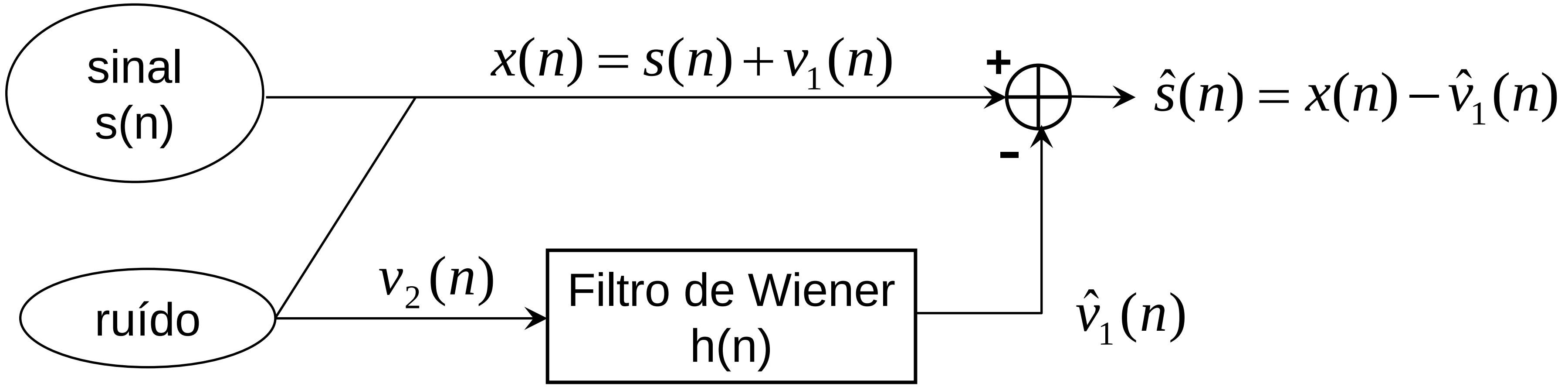
5. Filtro de Wiener como supressor de ruído

- Estimação de um sinal s(n) a partir de uma medida x(n) contaminada por ruído aditivo.

$$x(n) = s(n) + v_1(n)$$

- Neste caso, as estatísticas do ruído são obtidas através de um sensor secundário como mostra a figura.

- O sinal é utilizado para estimar o ruído $v_1(n)$.



- Os ruídos medidos nos dois sensores são correlacionados mas não são iguais; O filtro estima $v_1(n)$ a partir de $v_2(n)$.

- Obtenção das equações de Wiener-Hopf
  - Sinal de entrada $v_2(n)$
  - sinal a ser estimado $v_1(n)$
  - equações de Wiener-Hopf: $\Rightarrow$ $\mathbf{R}_{\mathbf{v}_2}\mathbf{h} = \mathbf{r}_{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}$
  - Cálculo da correlação cruzada:

$$
\begin{aligned}
r_{v_1v_2(k)} &= E\left[v_1(n)v_2^*(n-k)\right] = E\left[\left(x(n)-s(n)\right)v_2^*(n-k)\right] \\
&= E\left[x(n)v_2^*(n-k)\right] - E\left[s(n)v_2^*(n-k)\right] \\
&= E\left[x(n)v_2^*(n-k)\right] = r_{xv_2(k)}
\end{aligned}
$$

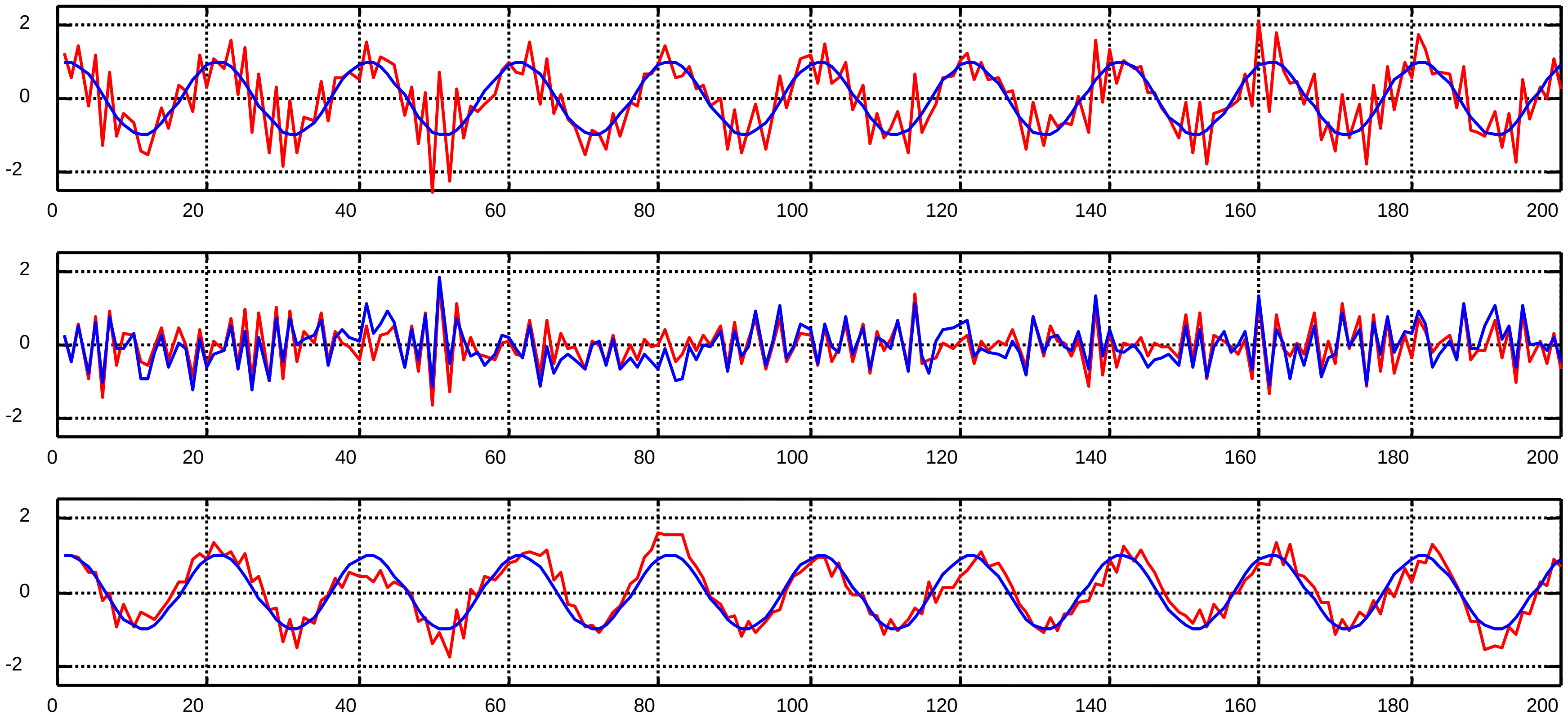
  - Portanto: $\mathbf{R}_{\mathbf{v}_2}\mathbf{h} = \mathbf{r}_{\mathbf{x}\mathbf{v}_2}$
  - Observe que $x(n)$ e $v_2(n)$ são sinais disponíveis e portanto é possível uma implementação prática deste filtro.

5.1 Exemplo

- **Sinal desejado:** $s(n) = \text{sen}(w_0 n + \phi) \quad onde: w_0 = 0.1\pi$

- Os sinais de ruído foram gerados considerando um modelo AR(1):

$$\begin{vmatrix} v_1(n) = 0.8 v_1(n-1) + g(n) \\ v_2(n) = 0.6 v_2(n-1) + g(n) \end{vmatrix} \quad onde\, g(n): ruído\, branco$$



6. Filtro de Wiener IIR

- Neste caso h(n) tem duração infinita.

- Tem-se disponível uma medida x(n) contaminada por ruído aditivo.

$$x(n) = s(n) + v(n)$$

- Dois tipos de filtros: causal e não causal.

6.1 Filtro de Wiener não causal

- Saída do filtro: $$\hat{s}(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(n-l)$$

- Problema: Encontrar o filtro que minimiza o erro quadrático médio:

$$\varepsilon = E\left[\| e(n) |^2\right] = E\left[\| s(n) - \hat{s}(n) |^2\right]_{MÍNIMO}$$

- Solução: derivando o erro com relação aos $h^*(k)$ tem-se que:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) r_x(k-l) = r_{sx}(k) \qquad : -\infty < k < \infty$$

- No domínio da frequência:

$$H(e^{jw}) = \frac{P_{sx}(e^{jw})}{P_x(e^{jw})}$$

- Erro quadrático médio mínimo:

$$\varepsilon_{MIN} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[P_s\left(e^{jw}\right) - H\left(e^{jw}\right)P_{sx}^*\left(e^{jw}\right)\right]dw = r_s(0) - \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)\, r_{sx}^*(l)$$

- No caso de sinal e ruído serem descorrelacionados:

$$H(e^{jw}) = \frac{P_s(e^{jw})}{P_s(e^{jw}) + P_v(e^{jw})}$$

$$P_s(e^{jw}) >> P_v(e^{jw}) \quad \Rightarrow H(e^{jw}) \approx 1$$ ➡ Sinal predominante

$$P_s(e^{jw}) << P_v(e^{jw}) \quad \Rightarrow H(e^{jw}) \approx 0$$ ➡ ruído predominante

6.2 Exemplo

- Sinal AR(1) com dep: $$P_s(z) = \frac{b_0^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

- Ruído branco com variância: σ_v^2

- Resposta do filtro: $$H(z) = \frac{b_0^2}{b_0^2 + \sigma_v^2 (1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

- admitindo: $b_0 = 0.5; \quad \alpha = 0.5; \quad \sigma_v^2 = 0.25$

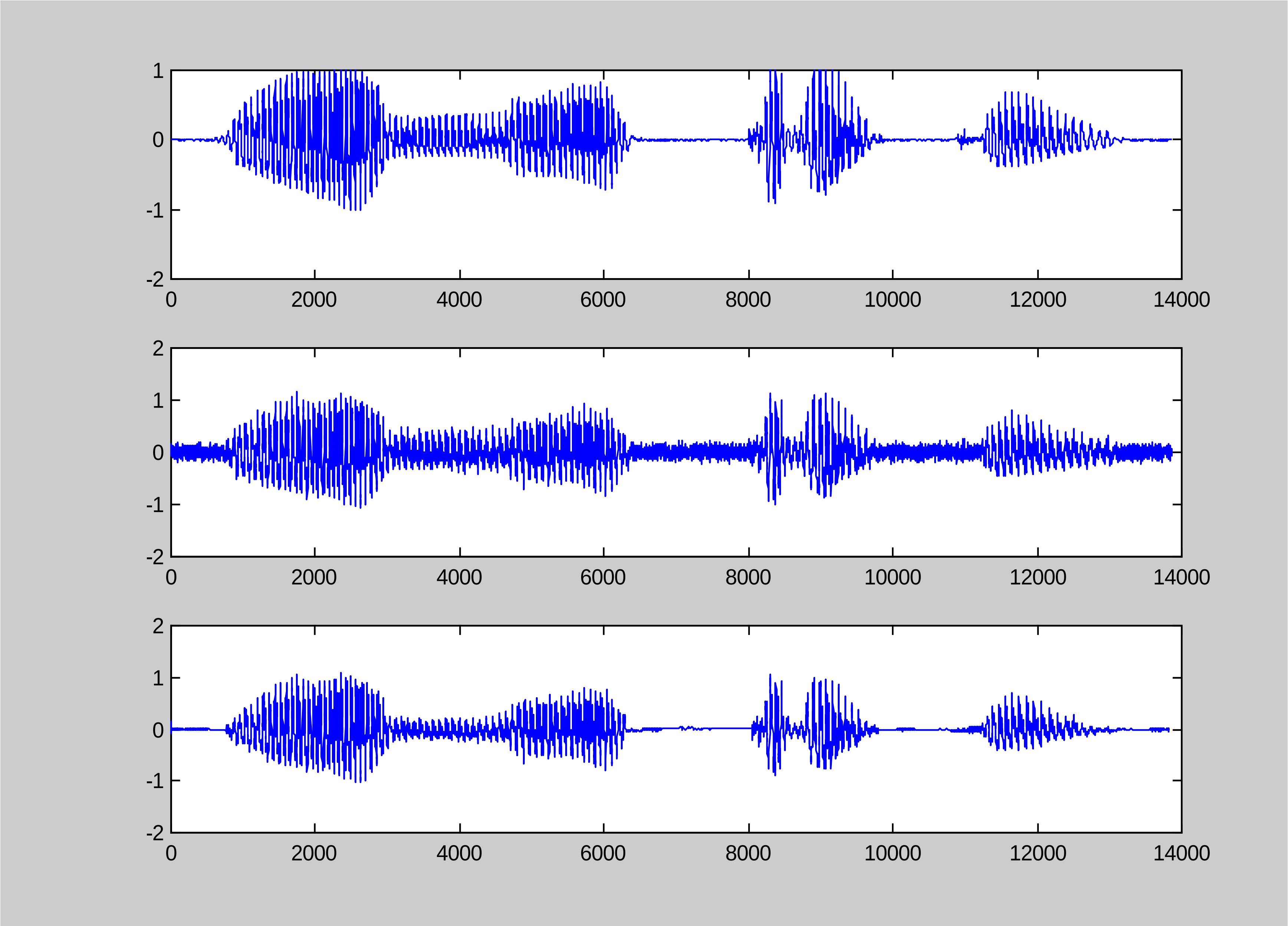
$$H(z) = \frac{0.4688}{(1-0.2344\, z^{-1})(1-0.2344\, z)} \qquad h(n) = 0.496 \times 0.2344^{|n|}$$

- Erro mínimo: $\varepsilon_{MIN} = \sigma_v^2 h(0) = 0.124$

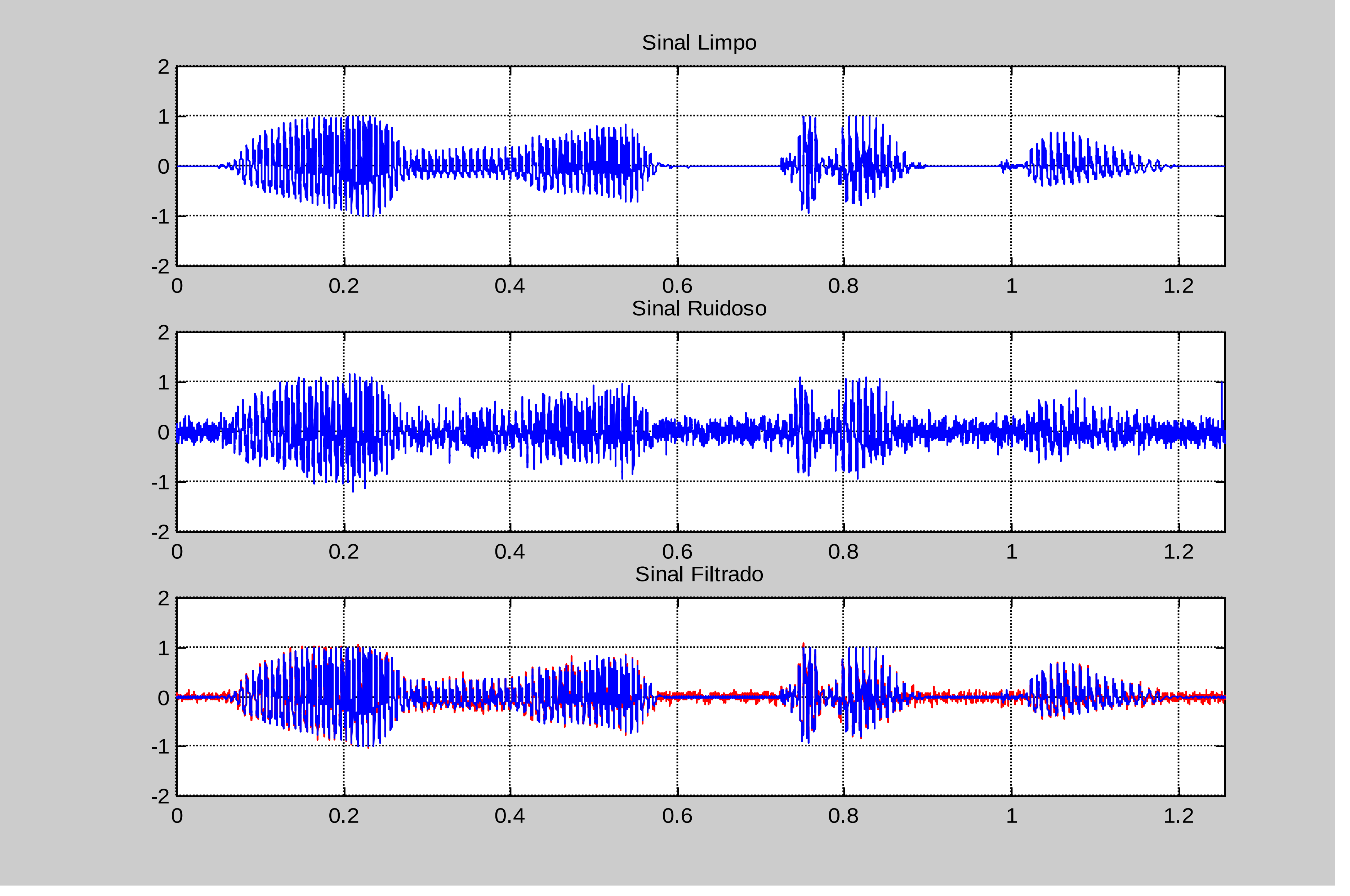
Apêndice

Exemplos de filtragem de um sinal de voz

Filtro de Kalman



Filtro de Wiener



Filtro de Butterworth

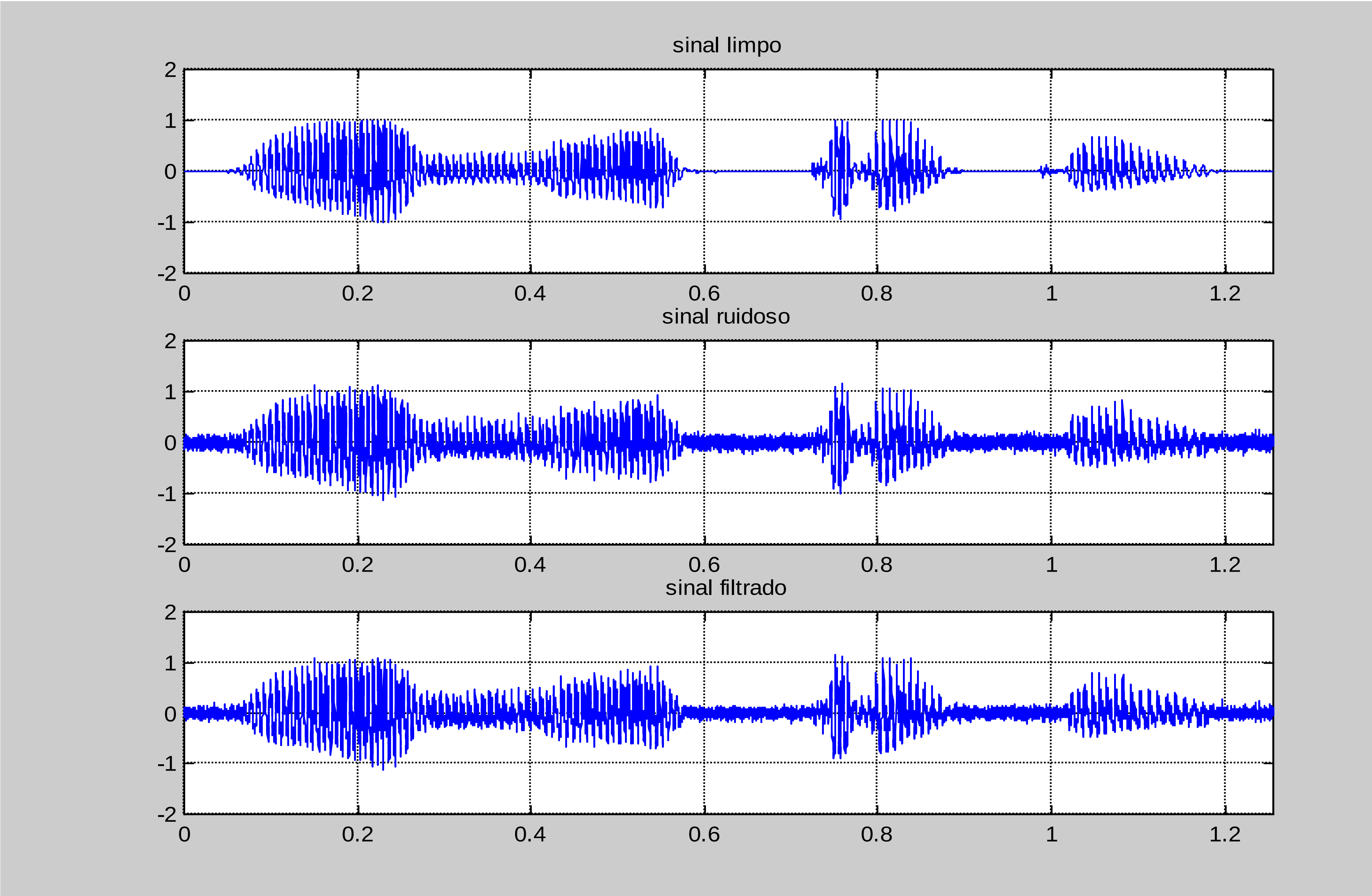


Tabela Comparativa

Filtro	Aumento na SNR
Butterworth	5 dB
Wiener	8 dB
Kalman	18 dB