Questão 1 (0,5 pt). Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definda como $f(x, y) = xy$. Determine o plano tangente do gráfico de f em $q = (2, 3, f(2, 3))$.

1. $z = -6 + 3x + 2y$
2. $z = 6 + 2yx - 2y - 3x$
3. $z = 6 + 2x + 3y$
4. não sei.

Observe que podemos utilizar o guia resumido 5 onde temos a seguinte fórmula para plano tangente de gráfico em um ponto $q = (p_1, p_2, f(p))$:

$$z = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - p_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - p_2)$$ P.T.

Nesse caso, temos $p = (2, 3)$, logo

$$f(p) = f(2, 3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Além disso, $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ que, aplicando no ponto p, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 2$$

Substituindo na fórmula do plano tangente (P.T.), temos:

$z = 6 + 3(x-2) + 2(y-3)$

$z = 6 + 3x - 6 + 2y - 6$

$z = 3x + 2y - 6$

Questão 2 (0,5 pt). Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$ Determine a derivada $df(p)$ onde $p = (\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}\pi}{6})$.

1. $df(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$
2. $df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$
3. $df(p) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$
4. $df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$
5. $df(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}$
6. $df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$
7. $df(p) = \frac{1+\sqrt{3}}{6}$
8. $df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$
9. não sei.

Lembre que para $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ a matriz derivada no ponto p é dada por:

$$df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

Calculando as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$f(x,y) = \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

derivando em relação a x (ou seja, y é visto como constante):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \overbrace{\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x}^{\text{regra da cadeia 3 vezes!!}}$$

$$= \frac{x \cdot \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Aplicando em $p = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}.$$

Agora derivando em relação a y (x é constante) temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \overbrace{\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}y}^{\text{novamente regra da cadeia 3 vezes}}$$

$$= \frac{y \cdot \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Aplicando p, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\frac{\sqrt{3}\pi}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}\pi}{12}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Finalmente, temos que

$$df(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

Questão 3 (0,5 pt). Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = 2(2x-x^2)(2y-y^2)$. Determine os pontos $p = (p_1, p_2)$ tais que os planos tangentes ao gráfico de f nos pontos $q = (p_1, p_2, f(p))$ sejam paralelos a $\{z = 0\}$.

1. $(1,1), (0,0), (2,0), (0,2), (2,2)$
2. $(1,0), (1,2), (0,1), (2,1)$
3. $(3,1), (4,1)$
4. não sei.

Perceba que se os planos são paralelos ao plano $z=0$, temos que o vetor normal a tal plano é

$$N = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right),$$

que é múltiplo do vetor $(0,0,1)$. Assim, vamos verificar pontos onde $\nabla f(p) = (0,0)$, ou seja, pontos tais que as derivadas direcionais são zero.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(2-2x)(2y-y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(2-2x) = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$2y - y^2 = 0$$

$$y(2-y) = 0$$

$$\boxed{y = 0}, \quad \boxed{y = 2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(2x - x^2)(2 - 2y) = 0$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$\boxed{x = 0}, \quad \boxed{x = 2}$$

$$2 - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Assim, substituindo todos os pares coordenados possíveis em $\nabla f(p) = (0,0)$, temos a alternativa

1.

Questão 4 (0,5 pt). Considere a aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como: $F(p_1, P_2, w) = (\frac{1}{3}\frac{w}{p_1}, \frac{2}{3}\frac{w}{p_2})$ Calcule $DF(q)$ onde $q = (\frac{1}{3}, 2, 5)$.

1. $DF(q) = \begin{bmatrix} -15 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
2. $DF(q) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$
3. $DF(q) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$
4. não sei.

$$F(p_1, p_2, w) = \Big(\underbrace{\frac{1}{3}\frac{w}{p_1}}_{F_1}, \underbrace{\frac{2}{3}\frac{w}{p_2}}_{F_2}\Big)$$

Esse exercício segue os mesmos moldes que o segundo.

Primeiro, observe que para $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, temos

$$DF(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1}(q) & \frac{\partial F_1}{\partial p_2}(q) & \frac{\partial F_1}{\partial w}(q) \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_1}(q) & \frac{\partial F_2}{\partial p_2}(q) & \frac{\partial F_2}{\partial w}(q) \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_1} = -\frac{1}{3} w \cdot p_1^{-2} = -\frac{w}{3p_1^2} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial p_1}(q) = -15$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial p_2}(q) = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial w} = \frac{1}{3p_1} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial w}(q) = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial p_1}(q) = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_2} = -\frac{2w}{3p_2^2} \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial p_2}(q) = -\frac{5}{6}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial w} = \frac{2}{3p_2} \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial w}(q) = \frac{1}{3}$$

Portanto,

$$DF(q) = \begin{bmatrix} -15 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$