

AULA 24

---

# MECÂNICA QUÂNTICA II

### 5.4) Espalhamento de Fótons

É um processo de 2º ordem: há um  $\gamma$  no estado inicial e no estado final  $\Rightarrow H_1$  em 2º ordem +  $H_2$   
 Nesse caso o operador  $T$  em ordem mais baixa que comece que descreva este processo é

$$T = H_2 + H_1 \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} H_1 \quad (67)$$

onde  $H_0 = H_\gamma + H_M$

Consideremos o espalhamento de um  $\gamma$  de momento  $k'$  e helicidade  $\lambda$  com um alvo no estado inicial  $|i\rangle$  produzindo um  $\gamma$  no estado final com momento  $k'$  e helicidade  $\lambda'$  e o alvo no estado  $|f\rangle$

$$|i\rangle \otimes |k\lambda\rangle \xrightarrow{T} |f\rangle \otimes |k'\lambda'\rangle$$

$$|\Phi_{i,k\lambda}\rangle \equiv |i; k\lambda\rangle = a_{k\lambda}^+ |i; 0\rangle \quad \text{estado inicial}$$

$$|\Phi_{f,k'\lambda'}\rangle \equiv |f; k'\lambda'\rangle = a_{k'\lambda'}^+ |f; 0\rangle \quad \text{estado final}$$

com

$$E_i + \hbar k c = E_f + \hbar k' c$$

A taxa de colisão é

$$d\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Phi_{f, \vec{k}' \lambda'} | T | \Phi_{i, \vec{k} \lambda} \rangle|^2 S_{k'}^{(\sigma)} \quad (68)$$

onde  $S_{k'}^{(\sigma)} = \frac{V}{(2\pi)^3} k'^2 d\Omega$  ( $\hbar=c=1$ )

e a densidade de estados finais dos fótons  
 O elemento de matriz da interação quadrática,  $H_2$ ,  
 entre esses estados é facilmente avaliado

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} (2kV)^{-1/2} [a_{\vec{k}\lambda} \vec{E}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + hc]$$

$$H_2 = \frac{e^2}{2m} |\vec{A}|^2 \Rightarrow \text{temos } a_{\vec{k}_1, \lambda_1}^+ a_{\vec{k}_2, \lambda_2} \text{ e } a_{\vec{k}_2, \lambda_2}^+ a_{\vec{k}_1, \lambda_1}$$

que contribuem para o processo

$$|\vec{A}|^2 \Rightarrow \sum_{\vec{k}_1} \sum_{\vec{k}_2} \frac{1}{2V \sqrt{k_1 k_2}} (\vec{E}_{\vec{k}_1} \cdot \vec{E}_{\vec{k}_2}^*) e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}} (a_{\vec{k}_1}^+ a_{\vec{k}_2}^+ + a_{\vec{k}_2}^+ a_{\vec{k}_1})$$

$$= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2V k} + \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}_1} \sum_{\vec{k}_2} \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} (\vec{E}_{\vec{k}_1} \cdot \vec{E}_{\vec{k}_2}^*) e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}} a_{\vec{k}_2}^+ a_{\vec{k}_1}$$

$[a_{\vec{k}_1}, a_{\vec{k}_2}^+] + 2 a_{\vec{k}_2}^+ a_{\vec{k}_1}$

onde  $\sum_{\vec{k}}, \sum_{\vec{k}_1}, \sum_{\vec{k}_2}$  implica soma em polarizações também. O 1º  
 termo não causa transição, assim o elemento de matriz

que precisamos calcular é

$$\langle 0 | a_{k'} a_{k_2}^+ a_{k_1} a_k^+ | 0 \rangle = \delta_{k_1, k'} \delta_{k_2, k} \delta_{\lambda_1, \lambda'} \delta_{\lambda_2, \lambda}$$

$$\langle f, k' \lambda' | H_2 | i; k \lambda \rangle = \frac{e^2}{2V} \frac{1}{\sqrt{k k'}} A_2 \quad (68)$$

onde

$$A_2 = (\vec{E}_{k' \lambda'}^* \cdot \vec{E}_{k \lambda}) \frac{1}{m} \sum_a \langle f | e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_a} | i \rangle$$

$$= \frac{\vec{E}_{k' \lambda'}^* \cdot \vec{E}_{k \lambda}}{m} F_{fi}(\vec{q}) \quad (69)$$

$\vec{q} = k - k'$  é o momento transferido

$F_{fi}(\vec{q})$  é o fator de forma que já vimos antes.

o termo de 2º ordem em  $H_1$  é

$$\mathcal{T}_1 = \sum_c \frac{\langle f; k' \lambda' | H_1 | \phi_c \rangle \langle \phi_c | H_1 | i; k \lambda \rangle}{E - E_c + i\epsilon} \quad (70)$$

$$H_0 | \phi_c \rangle = E_c | \phi_c \rangle = E_c | n \rangle | n_{k \lambda} \rangle$$

que envolve 2 tipos distintos de estados intermediários e denominadores. Vejamos

$$H_1 = -e \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{1}{2kV}} [J_{\vec{k} \lambda} a_{\vec{k} \lambda} + h.c.] \quad (38)$$

(1) aqueles devidos ao operador de aniquilação de  $H_1$  atuando em  $|i; \vec{k}, \lambda\rangle$  e deixando zero  $\delta$ s no estado intermediário. Nesse caso

$$|\phi_c\rangle \equiv |n; 0\rangle \quad E - E_c = E_i + \hbar k_c - E_n$$

onde  $n$  designa algum estado do alvo com energia  $E_n$

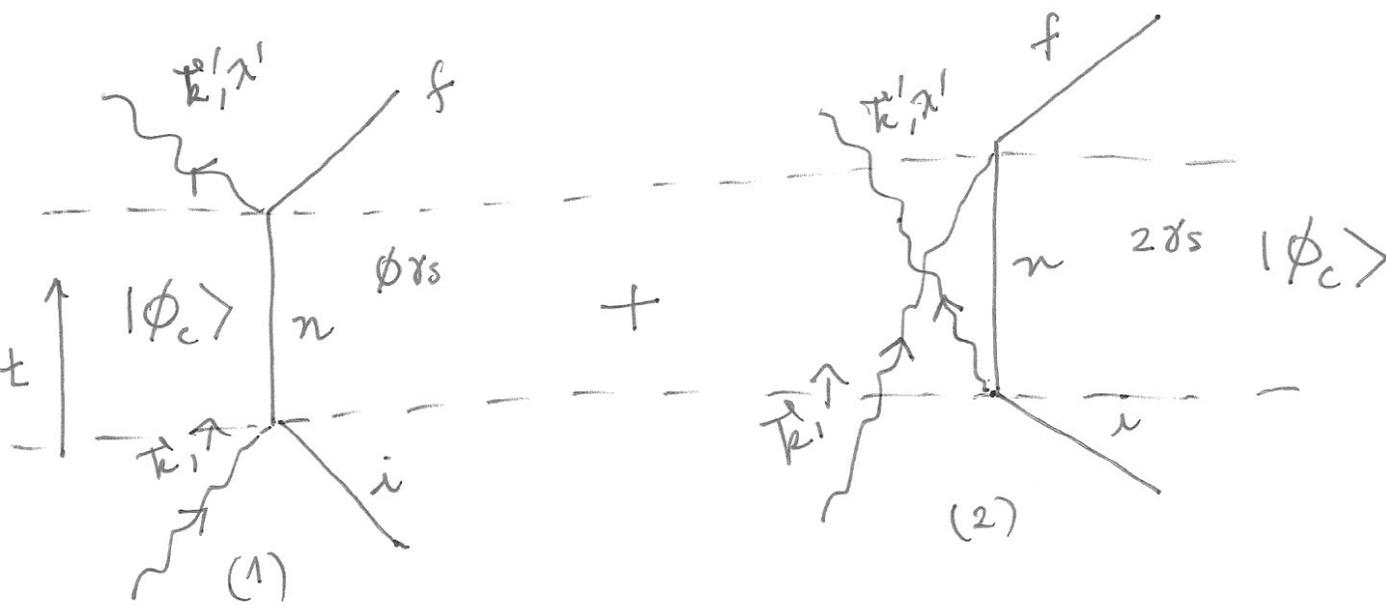
(2) aqueles devidos ao operador de criação de  $H_1$  atuando em  $|i; \vec{k}, \lambda\rangle$  que produzirá um estado intermediário com 2  $\delta$ s, sendo um o  $\delta$  incidente e o outro com números quânticos  $(\vec{k}', \lambda')$  não conhecidos. Nesse caso em

$\langle f; \vec{k}', \lambda' | H_1 | \phi_c \rangle$  os operadores de aniquilação em  $H_1$  precisam remover o  $\delta$  incidente de  $|\phi_c\rangle$  o que requer  $\vec{k}' = \vec{k}_i$  e  $\lambda' = \lambda_i$  para que o  $\gamma$  final seja aquele com números quânticos adequados.

$$|\phi_c\rangle \equiv |n; \vec{k}, \lambda, \vec{k}', \lambda'\rangle$$

$$\begin{aligned} E - E_c &= E_i + \hbar k_c - (E_n + \hbar k_c + \hbar k'_c) \\ &= E_i - E_n - \hbar k'_c \end{aligned}$$

As duas contribuições para a amplitude de espalhamento podem ser representadas pelos diagramas



As 2 contínuas para o processo

$$|i; k, \lambda\rangle \xrightarrow{H_1} |\phi_c\rangle \xrightarrow{H_1} |f; k', \lambda'\rangle$$

$$T_1 = \sum_c \frac{\langle f, k', \lambda' | H_1 | \phi_c \rangle \langle \phi_c | H_1 | i, k, \lambda \rangle}{E - E_c + i\epsilon}$$

$$\equiv \frac{e^2}{2V} \frac{1}{\sqrt{k k'}} A_1 \quad (71)$$

$$A_1 = \sum_n \left( \frac{\langle f | J_{k', \lambda'}^+ | n \rangle \langle n | J_{k, \lambda} | i \rangle}{E_i - E_n + k + i\epsilon} \right) +$$

$$\left( \frac{\langle f | J_{k, \lambda} | n \rangle \langle n | J_{k', \lambda'}^+ | i \rangle}{E_i - E_n - k' + i\epsilon} \right) \quad (72)$$

a taxa de espalhamento

$$d\Gamma = 2\pi \frac{e^4}{4V^2} \frac{1}{kk'} |A_1 + A_2|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} k'^2 d\Omega$$

$$= \frac{e^4}{16\pi^2} \frac{1}{V} \frac{k'}{k} |A_1 + A_2|^2 d\Omega \quad (73)$$

A seção de choque diferencial é essa taxa de transição dividida pelo fluxo incidente i.e.  $c/V$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2} \frac{k'}{k} |A_1 + A_2|^2 \quad \vec{E}_f^* \equiv \vec{E}_{k'\lambda'}^* ; \quad \vec{E}_i = \vec{E}_{k\lambda}$$

$$= \frac{\alpha^2}{m^2} \frac{k'}{k} \left| \vec{E}_f^* \cdot \vec{E}_i F_{fi}(\hat{q}) + m \sum_n \left( \frac{\langle f | \vec{J}_{k\lambda}^+ | n \rangle \langle n | \vec{J}_{k'\lambda'} | i \rangle}{E_i - E_n + k + i\varepsilon} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\langle f | \vec{J}_{k'\lambda'} | n \rangle \langle n | \vec{J}_{k\lambda}^+ | i \rangle}{E_i - E_n - k' + i\varepsilon} \right)^2 \quad (74)$$

Essa é a fórmula de Kramers-Heisenberg, que é proporcional ao raio clássico do elétron ao quadrado

$$r_0 = \frac{\alpha}{m} \quad (\text{raio clássico do elétron})$$

Essa fórmula tem várias aplicações interessantes e importantes.

Ele descreve espalhamentos elásticos e inelásticos a todas as frequências incidentes desde que o alvo possa ser descrito pela MQ não-relativística.

Em física atômica o espalhamento inelástico da luz é chamado de espalhamento Raman

A equação (74) contém também dois resultados famosos: o espalhamento Thomson (espalhamento de luz por uma carga sem estrutura) e o espalhamento Rayleigh (que é o limite de baixas frequências para um sistema esfericamente simétrico polarizável, como um átomo ou uma molécula).

Em ambos os casos as seções de choque tem a forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{k'}{k} |\vec{\epsilon}_f^* \cdot \vec{\epsilon}_i|^2 |A|^2 \quad (75)$$

que descreve o espalhamento elástico da luz por

- $A_f \equiv 1$  uma carga sem estrutura (Thomson)
- $A \equiv 2m\omega^2 D$  um sistema esfericamente simétrico polarizável (Rayleigh)

Se a polarizabilidade do alvo no seu estado fundamental

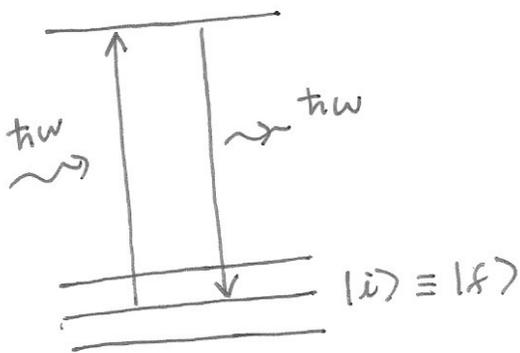
$$D = \sum_{n \neq g} \frac{\langle g | \hat{X} | n \rangle \langle n | \hat{X} | g \rangle}{E_g - E_n} \quad \hat{X} = \sum_a x_a$$

ex<sub>a</sub> é a componente do operador de dipolo elétrico (42)

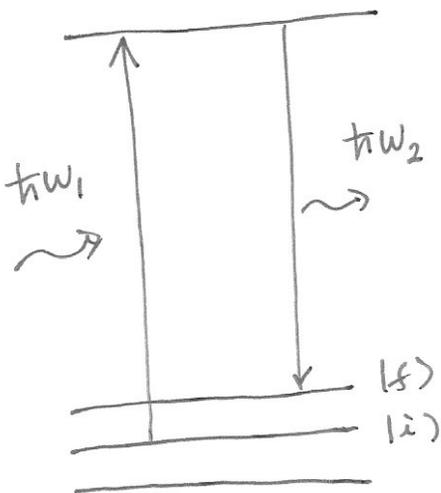
A fórmula de Kramers-Heisenberg tem um problema óbvio: ele é infinito quando a energia do fóton é igual a umas das energias de excitação do alvo. Para esse caso temos um espalhamento ressonante, um fenômeno conhecido como fluorescência ressonante.

Thomson :  $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$  (elástico)

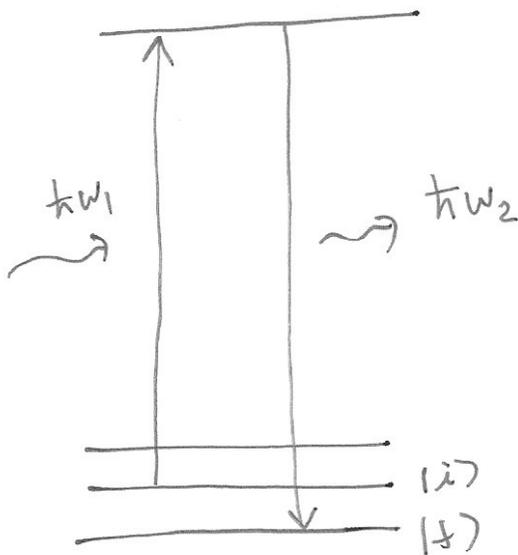
Rayleigh (elástico)



Raman (inelástico)

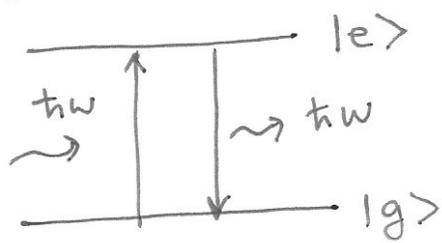


$$\hbar\omega_2 < \hbar\omega_1$$



$$\hbar\omega_2 > \hbar\omega_1$$

# Fluorescência Resonante



## 5.5) Espalhamento Resonante $(1s + \gamma \leftrightarrow 2p)$

Vamos construir um modelo para explicar a ressonância que esperamos quando o estado fundamental do H ( $1s$ ) e<sup>-</sup> excitado para o estado  $2p$  - linha Lyman- $\alpha$ . Nesse caso a fórmula de Kramers-Heisenberg não pode ser aplicada, isto é, a teoria de perturbação não funciona. Vamos introduzir aqui um modelo semelhante ao que já usamos antes, na teoria de espalhamento.

Considere os operadores

$$b_m^\dagger = |2p, m\rangle \langle 1s| \quad m = 0, \pm 1 \quad (76a)$$

$$b_m = |1s\rangle \langle 2p, m|$$

que produzem as transições  $1s \leftrightarrow 2p$  e

os operadores de projeção nesses estados

$$b_m^\dagger b_m = |2p, m\rangle \langle 2p, m| \quad (76b)$$

$$b_m b_m^\dagger = |1s\rangle \langle 1s|$$

admitindo que  $\lambda$  seja suficientemente grande para admitir que a aproximação de dipolo seja válida.

$$\langle 2p, m | H_1 | 1s; \vec{q}, \mu \rangle$$

$$\approx \frac{-ie}{\sqrt{2Vq}} (E_f - E_i) \langle 2p, m | \vec{r} \cdot \vec{E}_{\vec{q}, \mu} | 1s \rangle$$

$E_i + \hbar\omega_0 = E_f \Rightarrow E_{2p} - E_{1s} = \omega_0$  ( $\hbar=1$ ) é a energia de excitação.

Os elementos de matriz de dipolo podem ser escritos como

$$\langle 2p, m | \vec{r} | 1s \rangle = D \hat{e}_m^*$$

$$\hat{e}_0 = \hat{z} \quad \hat{e}_{\pm 1} = \mp (\hat{x} \pm i\hat{y})/\sqrt{2}$$

Podemos então adotar o seguinte Hamiltoniano que pode levar as transições ressonantes

$$H = H_0 + \omega_0 \sum_m b_m^\dagger b_m - i e \omega_0 D \sum_{\vec{q}} \sum_{\mu} \sum_m \frac{1}{\sqrt{2Vq}} [ (\vec{E}_{\vec{q}, \mu} \cdot \hat{e}_m^*) b_m^\dagger a_{\vec{q}, \mu} - (\vec{E}_{\vec{q}, \mu}^* \cdot \hat{e}_m) b_m a_{\vec{q}, \mu}^\dagger ]$$

↑  $H_1$  (77)

onde adotamos energia zero para o estado  $1s$ .

Em  $H_1$  os termos:

$b_m^\dagger a_{\vec{q}, \mu}$  levam à absorção  $\gamma + 1s \rightarrow 2p$

$b_m a_{\vec{q}, \mu}^\dagger$  " " emissão  $2p \rightarrow \gamma + 1s$

Ignoramos nesta aproximação a contribuição de

transições não ressonantes que aparecem na fórmula  
 Kramers-Heisenberg (importante para garantir causalidade!),  
 mas do ponto de vista prático isso não faz muita diferença  
 aqui.

Vemos que no caso de (77) o operador

$$\mathcal{N} = \sum_{\vec{q}, \mu} a_{\vec{q}, \mu}^{\dagger} a_{\vec{q}, \mu} + \sum_m b_m^{\dagger} b_m \quad (78)$$

é uma constante de movimento, i.e.  $[\mathcal{N}, H] = 0$

Se  $(\vec{k}, \lambda)$  são o momento e helicidade do  $\gamma$  incidente  
 $(\vec{k}', \lambda')$  " " " " espalhado  $k = k'$

Inicialmente o átomo encontra-se no estado fundamental  
 $|1s\rangle$ , logo o estado incidente  $|1s; \vec{k}, \lambda\rangle$  é autoestado de  $\mathcal{N}$   
 com autovalor 1

$$\mathcal{N} |1s; \vec{k}, \lambda\rangle = |1s; \vec{k}, \lambda\rangle$$

$\Rightarrow$  o estado de espalhamento deve pertencer a esse setor  
 ( $\mathcal{N} = 1$ ), logo o estado mais geral desse tipo é

$$|E\rangle = \sum_{\vec{q}, \mu} \chi_{\vec{q}, \mu} a_{\vec{q}, \mu}^{\dagger} |0\rangle + \sum_m c_m b_m^{\dagger} |0\rangle \quad (79)$$

$$|0\rangle \equiv |1s; 0\rangle$$

Antes do espalhamento a projeção do momento angular  
 ao longo de  $\vec{k}$  é simplesmente a helicidade  $\lambda$

(46)

Se quantizarmos o átomo de forma que seu mom. angular esteja ao longo dessa direção  $\Rightarrow$  apenas estados 2p com  $m=\lambda$  podem ser excitados, logo

$$C_m = C \delta_{m\lambda}$$

$C$  deve ser indep. de  $\lambda$  por invariância de rotação. Assum

$$|E\rangle = \sum_{\vec{q}\mu} \chi_{\vec{q}\mu} a_{\vec{q}\mu}^+ |0\rangle + C b_{\lambda}^+ |0\rangle \quad (80)$$

Agora  $|E\rangle$  deve obedecer a equação de Schrödinger:

$$H_0 |E\rangle = (H_T + \omega_0 \sum_m b_m^+ b_m) |E\rangle$$

$$= \sum_{\vec{q}\mu} q \chi_{\vec{q}\mu} a_{\vec{q}\mu}^+ |0\rangle + \omega_0 C b_{\lambda}^+ |0\rangle \quad (81a)$$

$$H_1 a_{\vec{q}\mu}^+ |0\rangle = \frac{-i e \omega_0 D}{\sqrt{2Vq}} (\vec{e}_{\vec{q}\mu} \cdot \vec{e}_{\vec{k}\lambda}^*) b_{\lambda}^+ |0\rangle \quad (81b)$$

$$H_1 b_{\lambda}^+ |0\rangle = i e \omega_0 D \sum_{\vec{q}\mu} \frac{(\vec{e}_{\vec{q}\mu}^* \cdot \vec{e}_{\vec{k}\lambda})}{\sqrt{2Vq}} a_{\vec{q}\mu}^+ |0\rangle \quad (81c)$$

$$H |E\rangle = \sum_{\vec{q}\mu} \chi_{\vec{q}\mu} \left( q a_{\vec{q}\mu}^+ - \frac{i e \omega_0 D}{\sqrt{2Vq}} (\vec{e}_{\vec{q}\mu} \cdot \vec{e}_{\vec{k}\lambda}^*) b_{\lambda}^+ \right) |0\rangle$$

$$+ C \left( \omega_0 b_{\lambda}^+ + i e \omega_0 D \sum_{\vec{q}\mu} \frac{(\vec{e}_{\vec{q}\mu}^* \cdot \vec{e}_{\vec{k}\lambda})}{\sqrt{2Vq}} a_{\vec{q}\mu}^+ \right) |0\rangle \quad (82)$$

$$H |E\rangle = E |E\rangle = E \left( \sum_{\vec{q}\mu} \chi_{\vec{q}\mu} a_{\vec{q}\mu}^+ |0\rangle + C b_{\lambda}^+ |0\rangle \right)$$

$$\left. \begin{aligned} (q-E) \chi_{\vec{q}\mu} + \frac{i e \omega_0 D}{\sqrt{2Vq}} C \frac{\vec{E}_{\vec{q}\mu}^* \cdot \vec{E}_{\vec{k}\lambda}}{\omega_0} &= 0 \\ (\omega_0 - E) C - i e \omega_0 D \sum_{\vec{q}\mu} \frac{\chi_{\vec{q}\mu}}{\sqrt{2Vq}} (\vec{E}_{\vec{q}\mu} \cdot \vec{E}_{\vec{k}\lambda}^*) &= 0 \end{aligned} \right\} (83)$$

(Soluçao vya Gottfried Cap 10.8) (Mostre!)

$$\chi_{\vec{q}\mu}^{(+)} = \delta_{\vec{q}, \vec{k}} \delta_{\mu, \lambda} + \frac{1}{k - q + i\epsilon} \frac{e^2 \omega_0^2 D^2}{2V \sqrt{k} e \omega_0 D} \frac{\vec{E}_{\vec{q}\mu}^* \cdot \vec{E}_{\vec{k}\lambda}}{k - \omega_0 - \Phi(k + i\epsilon)} \quad (84)$$

usando as condições de contorno para uma onda plana incidente de momento  $\vec{k}$  e helicidade  $\lambda$

$$\Phi(k + i\epsilon) = \frac{e^2 \omega_0^2 D^2}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{q dq}{k - q + i\epsilon} \quad (85)$$

$$C = - \frac{i \omega_0 e D}{\sqrt{2V k}} \frac{1}{k - \omega_0 - \Phi(k + i\epsilon)} \quad (86)$$

Podemos agora calcular a amplitude de espalhamento

$$T_{fi} = \langle \Phi_f | H_1 | \Psi_i^{(+)} \rangle$$

Nesse caso o estado final não interagente é  $a_{\vec{k}\lambda}^+ |0\rangle$  e a solução completa da equação de Schrödinger é

$$|\vec{k}\lambda^{(+)}\rangle = \sum_{\vec{q}\mu} \chi_{\vec{q}\mu}^{(+)} \underbrace{a_{\vec{q}\mu}^+ |0\rangle}_{\text{estado de 1 } \gamma} = \underbrace{\frac{i \omega_0 e D}{\sqrt{2V k}} \frac{1}{k - \omega_0 - \Phi(k + i\epsilon)}}_C \underbrace{b_{\vec{k}\lambda}^+ |0\rangle}_{\text{estado excitado}} \quad (87)$$

$$\Rightarrow T_{fi} = \langle 0 | a_{\vec{k}\lambda} H_1 | \vec{k}\lambda^{(+)} \rangle \quad (88) \quad (48)$$

$$H_I |k \lambda^{(+)}\rangle \text{ c.f. (81b) e (81c)}$$

$$a_{\vec{q}\mu}^+ |0\rangle \leftrightarrow b_{\vec{\lambda}}^+ |0\rangle, \text{ assim apenas } b_{\vec{\lambda}}^+ |0\rangle \text{ pode contribuir}$$

P/  $T_{fi}$ :

$$T_{fi} = C \langle 0 | a_{\vec{k}'\lambda'} H_I b_{\vec{\lambda}}^+ | 0 \rangle$$

$$\stackrel{(81c)}{=} \sum_{\vec{q}\mu} \frac{i e \omega_0 D C}{\sqrt{2Vq}} (\vec{E}_{\vec{q}\mu}^* \cdot \vec{E}_{\vec{k}\lambda}) \langle 0 | a_{\vec{k}'\lambda'} a_{\vec{q}\mu}^+ | 0 \rangle$$

$$\stackrel{(8b)}{=} \frac{e^2 \omega_0^2 D^2}{2Vk} \frac{\vec{E}_{\vec{k}'\lambda'}^* \cdot \vec{E}_{\vec{k}\lambda}}{k - \omega_0 - \Phi(k + i\varepsilon)} \quad (89)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 D^2 \omega_0^4 \left| \frac{\vec{E}_{\vec{k}'\lambda'}^* \cdot \vec{E}_{\vec{k}\lambda}}{k - \omega_0 - \Phi(k + i\varepsilon)} \right|^2 \quad (90)$$

$$\text{Im } \Phi(k + i\varepsilon) = \frac{-e^2 D^2 \omega_0^2 k}{6\pi} \int \frac{d^3q}{2(2\pi)^3} \delta(k - \omega_0 - \omega_q) = -\frac{k}{2\omega_0} \Gamma$$

$$\text{Lembrando: } \frac{1}{x - x' + i\varepsilon} = -i\pi \delta(x - x') + \text{P.V.} \frac{1}{x - x'}$$

( taxa de  
de conexão  
 $2p \rightarrow 1s$   
 $\Gamma \ll \omega_0!$  )

$$\text{Re } \Phi(k + i\varepsilon) \equiv \Delta(k)$$

$$T_{fi} = \frac{e^2 D^2 \omega_0^2}{2Vk} \frac{\vec{E}_{\vec{k}'\lambda'}^* \cdot \vec{E}_{\vec{k}\lambda}}{k - \omega_0 - \Delta + \frac{1}{2} i\Gamma}, \quad k = \omega_0, \Delta(\omega_0)$$

(49)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 (\mathcal{D}\omega_0)^4 \left| \frac{\vec{E}_{\vec{k}\lambda'} \cdot \vec{E}_{\vec{k}\lambda}}{k - \omega_0 - \Delta + \frac{1}{2}i\Gamma} \right|^2$$

Breit-Wigner

Podemos mostrar que a seção de choque total, integrada nos ângulos e somada sobre as helicidades finais (Mostu)

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{\omega_0^2} \frac{3}{8} \frac{\Gamma^2}{(k - \omega_0 - \Delta)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$$

$$\sigma_{res} = \frac{4\pi}{\omega_0^2} \frac{3}{2} \quad (\text{máximo})$$

só depende da frequência de ressonância  $\omega_0$

Podemos recordar aqui que a seção de choque p/partículas sem spin tem um limite superior  $4\pi(2l+1)/k^2$  para a onda parcial  $l$ . No problema presente apenas a onda parcial  $l=1$  espalha pois o estado intermediário é  $2p \rightarrow$  a seção de choque deveria ser  $3 \cdot \frac{4\pi}{\omega_0^2}$ . Ela é menor pois o  $\gamma$  só tem 2 não 3 estados de helicidade, a teoria não relativística não se aplica exatamente aqui.