PNV 3421 – Processos Estocásticos

Notas de Aula – Teoria de Filas 29/10/2020

Introdução a Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

1 – Estudo do número de clientes no sistema, $\{N(t), t \geq 0\}$ para uma fila M/M/1

Considere-se um processo de fila, com as seguintes características:

– processo de chegada de clientes é Poisson, com taxa λ (o que implica que os intervalos entre chegadas consecutivas são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de média $1/\lambda$);

– os tempos de atendimento dos clientes são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial, de média $1/\mu$;

– há um único posto para atendimento dos clientes.

Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ o número de clientes no sistema num instante t qualquer. Depois de ter estudado a cadeia de Markov (em tempo discreto) $\{X_n = n = 0, 1, 2, \ldots\}$ onde X_n é o número de clientes no sistema nos instantes em que há mudança no valor de $N(t)$, o objetivo agora é estudar o processo estocástico em tempo contínuo $\{N(t), t \geq 0\}$

No caso do exemplo introdutório de cadeias de Markov – o problema da autolocadora, para definir o local onde o veículo seria devolvido após a locação $(n+1)$, dado que no instante inicial o veículo se encontrava na loja i, utilizava-se a relação:

$$P[X_{n+1} = j / X_0 = i] = \sum_{k=1}^{5} P[X_n = k / X_0 = i] \times P[X_{n+1} = j / X_n = k] \quad (1)$$

Por analogia com a expressão (1), busca-se agora obter, para o processo estocástico em tempo contínuo $\{N(t), t \geq 0\}$, uma relação:

$$P[N(t+dt) = j / N(0) = i] = \sum_{k} P[N(t) = k / N(0) = i] \cdot P[N(t+dt) = j / N(t) = k] \quad (2)$$

Revisando as implicações da segunda definição de processo de Poisson, cabe estabelecer para o presente estudo que a probabilidade de duas ou mais chegadas no intervalo de tempo $(t, t+dt)$ é igual a zero e que a probabilidade de uma chegada é igual a λdt. Do ponto de vista da saída de clientes, sempre que há clientes no sistema, os intervalos entre saídas consecutivas são variáveis aleatórias independentes, com distribuição exponencial de média $1/\mu$, configurando um processo de saída Poisson com taxa μ. Assim, a probabilidade de duas ou mais saídas no intervalo de tempo $(t, t+dt)$ é igual a zero e a probabilidade de uma saída neste intervalo é igual a μdt. Portanto, na expressão 2 somente devem ser considerados os valores de $k = j-1$, j e $j+1$. Isto é, somente a partir dos estados $j-1$, j e $j+1$, no instante t, é possível acessar o estado j no instante $t+dt$.

A Figura 1 ilustra os conceitos aqui apresentados. Se $N(t) = j-1$, $N(t+dt]$ assumirá valor j caso haja uma chegada e nenhuma saída no intervalo de tempo $[t, t+dt]$. Se $N(t) = j+1$, $N(t+dt)$ assumirá

valor j caso haja uma saída e nenhuma chegada no intervalo de tempo $(t, t+dt]$. Por fim, se $N(t) = j$, $N(t+dt)$ assumirá valor j caso não haja nenhuma chegada e nenhuma saída no intervalo de tempo $(t, t+dt]$. (A ocorrência de uma chegada e uma saída no intervalo de tempo $(t, t+dt]$ é um evento análogo à ocorrência de duas chegadas ou duas saídas no mesmo intervalo com probabilidade igual a zero.)
É importante destacar que toda essa análise como também a Figura 1 não se aplicam ao caso $N(t+dt) = 0$, pois este estado somente pode ser acessado a partir dos estados $N(t) = 0$ e $N(t) = 1$.

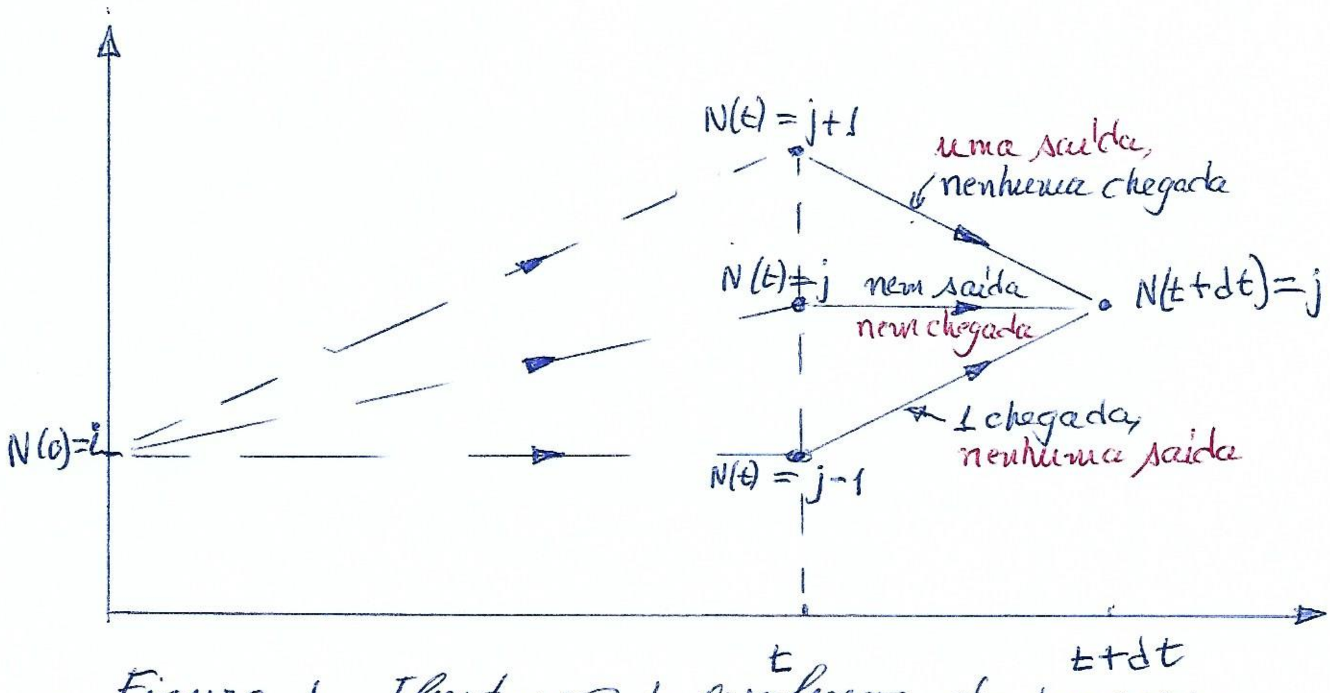

Figura 1. Ilustração da evolução do processo.

Assim, a partir dos comentários apresentados, a expressão genérica (2) adquire a seguinte forma:

$$P[N(t+dt)=j/N(0)=i] =$$

$$= P[N(t)=j-1/N(0)=i] \times P[N(t+dt)=j/N(t)=j-1] +$$
$$+ P[N(t)=j/N(0)=i] \times P[N(t+dt)=j/N(t)=j] +$$
$$+ P[N(t)=j+1/N(0)=i] \times P[N(t+dt)=j/N(t)=j+1] =$$

$$= \lambda dt(1-\mu dt) \cdot P[N(t)=j-1/N(0)=i] +$$
$$+ (1-\lambda dt)(1-\mu dt) \cdot P[N(t)=j/N(0)=i] +$$
$$+ \mu dt(1-\lambda dt) \cdot P[N(t)=j+1/N(0)=i] \qquad (3)$$

Eliminando-se em (3) os termos em $(dt)^2$ (infinitésimos de segunda ordem), obtém-se a expressão:

$$P[N(t+dt)=j/N(0)=i] =$$

$$= P[N(t)=j/N(0)=i] +$$
$$+ \lambda dt\, P[N(t)=j-1/N(0)=i] +$$
$$+ \mu dt\, P[N(t)=j+1/N(0)=i] +$$
$$- (\lambda+\mu)dt \times P[N(t)=j/N(0)=i] \qquad (4)$$

Passando-se para o lado esquerdo a primeira parcela do lado direito de (4) e dividindo-se por dt, resulta:

$$\frac{P[N(t+dt)=j/N(0)=i - P[N(t)=j/N(0)=i]}{dt} =$$

$$= P'[N(t)=j/N(0)=i] =$$

$$= \lambda P[N(t)=j-1/N(0)=i] +$$

$$+ \mu P[N(t)=j+1/N(0)=i] +$$

$$-(\lambda+\mu) P[N(t)=j/N(0)=i] \qquad (5)$$

A equação (5) se aplica a todo $j \geq 1$ e configura um sistema de equações diferenciais para $P[N(t)=j/N(0)=i]$. Para $j=0$, haveria uma equação específica:

$$P'[N(t)=0/N(0)=i] =$$

$$= \mu P[N(t)=1/N(0)=i] +$$

$$-\lambda P[N(t)=0/N(0)=i] \qquad (6)$$

2. Distribuição Estacionária

Nosso interesse é examinar o processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ em regime estacionário, admitindo inicialmente que ele existe e depois estabelecendo as condições para sua existência. Em regime estacionário,

$$\lim_{t \to \infty} P[N(t)=j/N(0)=i] = p_j$$

implicando que os lados de (5) e (6) se anulam, resultando as seguintes relações:

$$\lambda p_{j-1} + \mu p_{j+1} = (\lambda + \mu) p_j \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \tag{8}$$

às quais se acrescenta a equação

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \tag{9}$$

a fim de obter a distribuição estacionária de probabilidades p_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Adotando-se procedimento semelhante ao utilizado para a cadeia de Markov da fila M/M/1, o caminho é escrever cada p_j em função de p_0, utilizando-se as equações (8) e (7) e depois obter o valor de p_0 por meio da equação (9).

Da equação 8,

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0 = \rho p_0 \tag{10}$$

Da equação (7) para $j = 1$

$$\lambda p_0 + \mu p_2 = (\lambda + \mu) p_1$$

da qual se obtém o valor de p_2:

$$p_2 = \frac{1}{\mu} \left((\lambda + \mu) p_1 - \lambda p_0 \right) =$$

$$= (\rho + 1) \rho p_0 - \rho p_0 = \rho^2 p_0 \tag{11}$$

Da equação (7) para $j = 2$,

$$\lambda p_1 + \mu p_3 = (\lambda + \mu) p_2$$

da qual se obtém o valor de p_3:

$$p_3 = \frac{1}{\mu}\left((\lambda+\mu) p_2 - \lambda p_1 \right) =$$

$$= (\rho + 1) p_2 - \rho p_1 = (\rho^3 + \rho^2) p_0 - \rho^2 p_0$$

$$p_3 = \rho^3 p_0 \qquad (12)$$

Assim é possível generalizar:

$$p_j = \rho^j p_0 \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots \qquad (13)$$

Substituindo-se os valores de p_j (13) na equação (9), conclui-se que a série converge se e somente se $\rho \doteq \lambda/\mu < 1$, que é a condição para a existência da distribuição estacionária p_j, $j = 0, 1, 2, \dots$ (que é a mesma condição para a existência da distribuição estacionária π_j, $j = 0, 1, 2, \dots$, associada à cadeia de Markov da fila M/M/1.) Com $\rho < 1$, da equação (9), obtém-se o valor

$$p_0 = (1 - \rho) \qquad (14)$$

e, assim, levando em conta (13):

$$p_j = (1-\rho)\rho^j \quad , \; j = 0, 1, 2, \ldots \quad (15)$$

3 _ Diagrama das taxas de transição

As equações (7) e (8) que definem a distribuição estacionária p_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, podem ser visualizadas no diagrama das taxas de transição da Figura 2. Para um dado estado j, $j \geq 1$, no intervalo de tempo $(t, t+dt)$ a perda de probabilidade para a frente (estado $j+1$), com taxa λ, associada a uma chegada, e para trás (estado $j-1$), com taxa μ, associada a uma saída é compensada com o ganho de probabilidade, com taxa λ, proveniente do estado $j-1$ e com taxa μ, proveniente do estado $(j+1)$. No caso do estado 0, há uma perda para frente, com taxa λ, compensada por um ganho, com taxa μ, proveniente de 1.

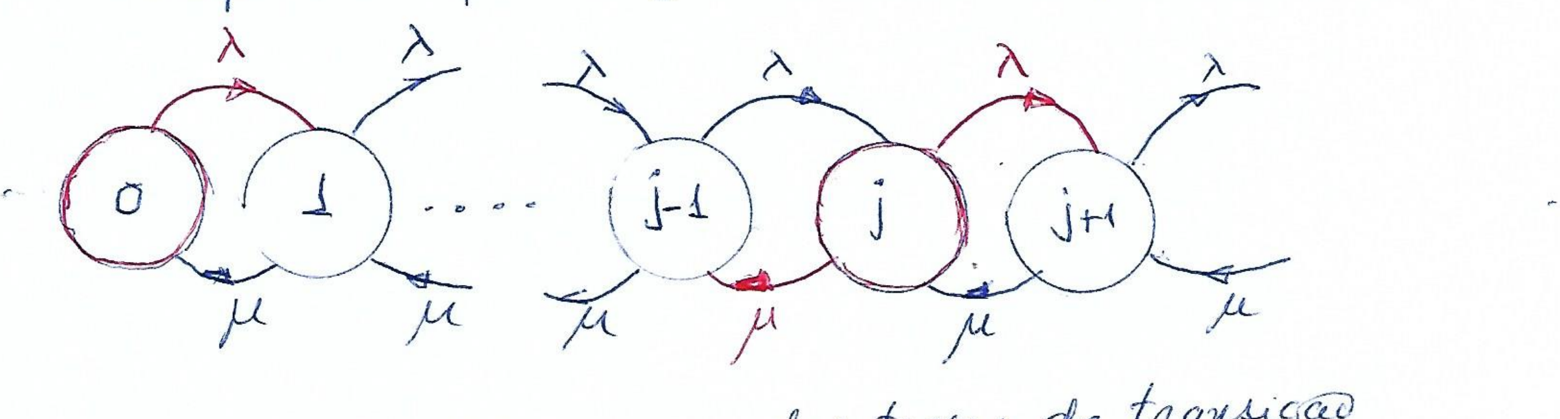

Figura 2 Diagrama das taxas de transição (de probabilidades) em regime estacionário para a fila M/M/1

4. Número Médio de Clientes no Sistema

A média da distribuição das probabilidades p_j, $j=0,1,2,\ldots$, fornece o número médio de clientes no sistema em um instante t qualquer do regime estacionário.

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} j\, p_j = (1-\rho)\sum_{j=1}^{\infty} j\rho^j =$$

$$= (1-\rho)\rho \sum_{j=1}^{\infty} j\rho^{j-1} =$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j) =$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) = (1-\rho)\rho \times \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

e $$L = \frac{\rho}{(1-\rho)} \qquad (16)$$

<u>Sugestão</u> Compare este resultado com o valor de L' para a cadeia de Markov da fila $M/G/1$, quando o atendimento é exponencial.

5- Relação entre as probabilidades estacionárias p_j do processo $\{N(t), t \geq 0\}$ e as probabilidades estacionárias π_j da cadeia de Markov da fila M/M/1

Para qualquer estado $j \geq 1$, do processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ que representa o número de clientes no sistema para uma fila M/M/1, o tempo de permanência no estado j é uma variável aleatória exponencial com média $1/(\lambda+\mu)$ já que é o mínimo entre uma variável exponencial de média $1/\lambda$, associada à próxima chegada, e uma variável exponencial de média $1/\mu$, associada à próxima saída. No caso do estado 0, o tempo de permanência é uma variável exponencial de média $1/\lambda$.

Tendo em vista que a probabilidade π_j representa a fração de visitas ao estado j em regime estacionário e que p_j representa a fração do tempo em que o processo fica no estado j em regime estacionário, uma conjectura natural seria a existência da relação

$$p_j = \frac{\pi_j \mu_j}{\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \mu_i} \qquad (17)$$

onde μ_j representa o tempo médio de permanência no estado j.

Lembrando que:

$$\pi_0 = (1-\rho)/2$$

$$\pi_j = (1+\rho)\,\rho^{j-1}\,\pi_0$$

a expressão (17) fornece o seguinte valor para p_0

$$p_0 = \frac{\frac{1}{\lambda}\pi_0}{\frac{1}{\lambda}\pi_0 + \frac{1}{\lambda+\mu}\pi_0(1+\rho)\sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}} =$$

$$= \frac{1/\lambda}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\frac{(\lambda+\mu)\mu}{\mu}}(1+\rho)\frac{1}{(1-\rho)}} =$$

$$= \frac{\lambda \times \quad 1/\lambda}{\lambda \times \left(1/\lambda + \frac{1}{\mu(1-\rho)}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\rho}{1-\rho}} = (1-\rho)$$

confirmando a validade da conjectura para o caso $j = 0$

Para $j \geq 1$

$$p_j = \frac{\frac{1}{\lambda+\mu} \times \pi_0 (1+\rho)\, \rho^{j-1}}{\frac{1}{\lambda}\pi_0 + \frac{1}{\lambda+\mu}\pi_0 (1+\rho)\frac{1}{(1-\rho)}} =$$

$$= \frac{\times\lambda\left(\frac{1}{\mu}\rho^{j-1}\right)}{\times\lambda\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu(1-\rho)}\right)} =$$

$$= \frac{\rho^j}{1+\frac{\rho}{(1-\rho)}} = (1-\rho)\rho^j \qquad j = 1, 2, \dots$$

confirmando também a validade da conjectura.